Física

PAUL A. TIPLER

Oakland University
Rochester, Michigan

Traduzido por

Horacio Macedo
Livre-docente da UFRJ

Volume 1

BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE FÍSICA E QUÍMICA DE SÃO CARLOS - USP
FÍSICA

GUANABARA
DOIS

Prefácio

Este é um livro-texto destinado a um curso de dois ou três semestres para estudantes de engenharia ou ciência. Admite-se, na sua exposição, que os estudantes já tenham, ou estejam tendo, um curso de cálculo diferencial e integral. Apresentam-se os setores habituais da física clássica: mecânica (Capítulos 1-16), termodinâmica (Capítulos 17-19), ondas (Capítulos 20-27) e eletromagnetismo (Capítulos 29-41). Além disso, acrescentam-se a relatividade restrita, discutida no Capítulo 28, e a quantificação, no Capítulo 42.

Apesar de só me haver afastado ligeiramente da ordem tradicional dos assuntos, tentei acentuar a unidade da física e a economia das teorias físicas, relacionando diversos fenômenos mediante uma descrição teórica comum a eles. Muitos tópicos foram introduzidos como exemplos, ilustrando princípios físicos mais gerais. Por exemplo, não há um capítulo separado sobre mecânica dos fluidos. Em lugar dele, discute-se o princípio de Arquimedes como um exemplo da aplicação das leis de Newton, no Capítulo 5, e a equação de Bernoulli é deduzida como uma aplicação do teorema do trabalho e energia, no Capítulo 9. Analogamente, a relação entre a pressão de um gás e a energia cinética das moléculas se obtém, no Capítulo 11, como uma aplicação da equação do impulso e variação da quantidade de movimento. Esta aplicação imediata dos princípios gerais à descrição de fenômenos interessantes faz a teoria menos abstrata para o aluno principiante.

O ensino da física elementar é complicado pela existência de uma ampla faixa de conhecimentos e capacidades entre os alunos de cada turma. Alguns tiveram um bom curso de física e de cálculo no ensino médio; outros nada ouviram falar de física e estão iniciando a luta com o cálculo, num primeiro curso. Tentei escrever o livro de modo que o aluno menos preparado fosse capaz de lê-lo e apreciá-lo, e de ganhar confiança, pois poderá resolver todos os exercícios. Ao mesmo tempo, seções facultativas e alguns problemas difíceis também aparecem, para testar os alunos mais bem preparados. Devido à diversidade de conhecimentos básicos de matemática, incluí uma revisão de trigonometria no primeiro capítulo e discuti a derivação e integração, ao introduzir os conceitos cinemáticos de velocidade e de aceleração, no Capítulo 2.

Apesar de haver beleza e elegância na dedução matemática de um resultado particular a partir de uma teoria geral, a maior parte dos alunos aprende mais facilmente quando os conceitos novos são introduzidos por via intuitiva, não-matemática, a partir de exemplos específicos para relações mais gerais. Em muitos casos, segui esta orientação, dando a dedução geral, ou formal, numa seção facultativa, no final da discussão ou do capítulo. Sempre que possível, os conceitos foram introduzidos em uma só dimensão e, depois, generalizados para três dimensões.

As deduções se fazem sem apelo ao cálculo diferencial e integral, sempre que possível, com as deduções analíticas incluídas para permitir comparações. Ilustram-se derivações e integrações simples em exemplos resolvidos e em problemas, ao longo do livro. Assuntos mais difíceis, do ponto de vista matemático, ou que podem ser omitidos sem perda de continuidade, são denominados "facultativos" e localizados à direita das páginas, limitados por linhas. Muitas deduções são colocadas nesta coluna facultativa.

Muitas vezes, para mostrar a inter-relação entre fenômenos, um conceito é mencionado rapidamente, apesar de o seu tratamento só ser realizado em detalhes mais adiante. Por exemplo, a lei de Newton, da gravitação, e a lei de Coulomb aparecem como exemplos das forças básicas (Capítulo 6) e são tratadas posteriormente em detalhes (Capítulos 16 e 29). Analogamente, a energia potencial gravitacional é mencionada em termos da recuperação de trabalho (no final do Capítulo 7) e discutida mais completamente depois da introdução da idéia de força conservativa.

Assuntos relacionados com aplicações e técnicas incluem-se, com freqüência, em seções de "como fazer". Isto possibilita a utilização de muitos exemplos, ordenados em dificuldade crescente, sem perturbar a continuidade da discussão dos conceitos. Por exemplo, as leis de Newton são discutidas no Capítulo 4, enquanto a sua aplicação a problemas aparece em exemplos no Capítulo 5. O campo elétrico e suas propriedades são discutidos no Capítulo 29, enquanto o cálculo do campo de diversas distribuições de carga ilustra-se no Capítulo 30.

Um pequeno afastamento da ordem tradicional dos tópicos é a rápida discussão das quatro interações fundamentais, apresentada na mecânica clássica (Capítulo 6), juntamente com uma discussão das forças moleculares e de forças empíricas, como as de sustentação, de atrito, e as exercidas por molas e cordas. A menção das forças gravitacionais e eletrostáticas, nesta altura, possibilita maior variedade de exemplos das funções energia potencial, no Capítulo 8, além das associadas a forças constantes ou a forças de molas. Permite, também, a discussão de fenômenos interessantes, como velocidade de escape, energia de ligação, dissociação molecular, mediante o uso dos teoremas da conservação da energia, no Capítulo 9.

Um afastamento mais significativo em relação à ordem tradicional é o tratamento unificado das ondas. Discutem-se, como fenômenos ondulatórios gerais, aplicáveis às ondas em cordas, ou às ondas acústicas ou luminosas, a reflexão, a refração, a interferência, a difração, a dispersão etc. Esta integração dos vários fenômenos ondulatórios ilustra a ampla aplicabilidade da teoria física e torna mais fácil para o estudante a compreensão das propriedades importantes do som e da luz. Em particular, a discussão geral da difração e a validade da aproximação retilínea, no Capítulo 25, constitui a base para o entendimento da dualidade onda-partícula (Capítulo 42) e para o estudo posterior da teoria quântica. Coloquei este assunto antes da eletricidade e do magnetismo por duas razões: (1) o estudo do movimento harmônico simples está ainda bem presente na idéia dos alunos, e (2) a maioria dos estudantes acha o entendimento das ondas, com tantas demonstrações em classe quantas forem possíveis, mais fácil e mais intuitivo que as idéias abstratas da eletricidade e do magnetismo. Os professores que preferirem apresentar, em primeiro lugar, os conceitos de eletricidade e de magnetismo podem passar para o Capítulo 29 depois de terminar o 19, e retornar depois ao Capítulo 20.

Dentro de cada capítulo inserem-se perguntas no final de várias seções. Algumas são rotineiras e podem ser facilmente respondidas com a matéria discutida na seção precedente. Outras são abertas, e servem de base para uma discussão em classe. No final de cada capítulo, há uma seção de revisão. É constituída, em geral, por uma relação de palavras e frases que os estudantes devem "definir, aplicar ou comentar" e um conjunto de questões do tipo "certo ou errado". O número da página em que a definição dos conceitos é dada, no corpo da matéria, aparece adiante de cada palavra da lista; as respostas aos problemas certo-errado aparecem no final do livro. Depois da seção de revisão há uma extensa seqüência de exercícios, (usualmente cerca de 30) organizados pelas seções do capítulo. Estes exercícios não são difíceis, e cada um envolve somente o material da respectiva seção. Os exercícios são seguidos de um conjunto de problemas, que tendem a ser um pouco mais difíceis, envolvendo mais matemática ou exigindo do estudante a utilização de conceitos de mais de uma seção ou de dados provenientes da sua experiência pessoal. As respostas (algumas vezes com sugestões) de todos os exercícios e problemas ímpares aparecem ao final do livro. Sugiro que o professor exija a resolução de mais exercícios que problemas. A minha experiência indica que a autoconfiança é um fator importante na aprendizagem e pode ser destruída, com facilidade, por problemas muito difíceis. Os exercícios visam a consolidar a autoconfiança dos estudantes.

Para este livro foram escritos, especialmente, quinze ensaios. Três são biográficos (sobre Isaac Newton, Albert Einstein e Benjamin Franklin), muitos sobre aplicações práticas (por exemplo, xerografia, transistores, astronomia a radar) e outros sobre assuntos de interesse atual (poluição térmica, buracos negros, fontes de energia). Os ensaios destinam-se à apreciação e informação dos alunos e professores. Não há exercícios ou problemas a eles relacionados.

Apesar de utilizar-se predominantemente o sistema internacional de unidades (SI), introduzi o sistema técnico de unidades inglesas* nos capítulos de mecânica, e também unidades que se empregam comumente, como a caloria, o elétron-volt, a atmosfera, etc., nos casos convenientes.

Para ser completo e flexível, o texto contém mais matéria do que pode ser coberto num curso de dois semestres. Há assunto suficiente para um curso de três semestres e talvez, com uma suplementação em tópicos de física moderna, para um de quatro semestres. Para utilizar o livro num curso de dois semestres, conforme o que ministro, é necessário omitir ou explicar superficialmente algumas seções e capítulos além dos "facultativos". Um método de ampliar um curso (sacrificando parte da sua profundidade) é o de indicar a leitura e estudo de um capítulo ou seção sem mandar resolver os exercícios. Recomendaria este procedimento aos que ficarem tentados a omitir o Capítulo 15, pois a importante idéia de ressonância deve ser pelo menos apresentada aos alunos tão cedo quanto possível. A inclusão, ou a omissão, de certos assuntos depende, naturalmente, do julgamento do professor e das necessidades específicas dos alunos. Para um curso de dois semestres sugeriria omitir, além das seções facultativas, as seguintes: seções 5.4 (movimento com força retardadora proporcional à velocidade), 9.3 (equação de Bernoulli), 10.6 (cálculo do centro de massa por integração), 11.7 (colisões elásticas em três dimensões), 11.9 (limiar de reação), 11.10 (coeficiente de restituição), 12.6 (equilíbrio estático de um corpo rígido), 13.6 (movimento dum giroscópio), 14.8 (combinações de dois movimentos harmônicos simples), 21.7 (energia e intensidade de ondas harmônicas acústicas), 23.3 (análise e síntese harmônicas), 23.4 (pacotes de ondas), 23.5 (dispersão), 25.8 (espalhamento Bragg), 26.8 (rede de difração), 29.8 (dipolo elétrico num campo elétrico), 34.6 (conservação da carga e aproximação do equilíbrio eletrostático), 37.3

*Nesta tradução, o sistema inglês foi completamente abolido, adotando-se o sistema internacional e as unidades de utilização legal e corrente no Brasil. (N.T.)

(relatividade restrita e campo magnético), e os Capítulos 28 (relatividade restrita), 40 (circuitos de corrente alternada), 41 (equações de Maxwell e ondas eletromagnéticas) e 42 (quantificação).

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram para este livro. Gostaria de agradecer a todos os que analisaram os diversos esboços e edições preliminares e ofereceram sugestões úteis. Em particular, a James Gerhart, que foi uma fonte constante de informações, de inspiração e de encorajamento em todos os esboços iniciais e edições preliminares. Sua generosa hospitalidade, durante o verão agradável e produtivo que passei na Universidade de Washington, e a sua ajuda na redação dos problemas, desenhos das figuras e na crítica ao manuscrito foram amplamente responsáveis pelo desenvolvimento do projeto. A ajuda de John McKinley foi insuperável, na revisão, linha a linha, do manuscrito final, na verificação das figuras definitivas, e na ajuda geral em todas as fases da produção, inclusive na leitura das provas. Jerry Griggs sugeriu muitos exercícios e problemas interessantes, e resolveu todos os de número ímpar, para controlar a seção de respostas. Stanley Williams reviu todos os exercícios e problemas, supervisionou a respectiva resolução e sugeriu exercícios e problemas para os últimos capítulos. Outros que reviram várias partes do manuscrito foram Reuben E. Alley, Jr., da Academia Naval dos Estados Unidos; Wallace Arthur, da Universidade Fairleigh Dickinson; Leo L. Baggerly, do Colégio Estadual da Califórnia, Bakersfield; Bill Beam, do Instituto de Tecnologia Rose-Hulman; James R. Benbrook, da Universidade de Houston; Robert A. Boyer, do Colégio Muhlenberg; Morton K. Brussel, da Universidade de Illinois; Charles Buchanan, da Universidade da Califórnia; Robert Folk, da Universidade de Lehigh; Kenneth N. Geller, da Universidade de Drexel; Sigmund P. Harris, do Colégio Los Angeles Pierce; Alvin M. Hudson, do Colégio Ocidental; Granvil C. Kyker, do Instituto de Tecnologia Rose-Hulman; David A. Nordling, da Academia Naval dos Estados Unidos; Jack Prince, do Colégio da Comunidade de Bronx; Edward A. Saunders, da Academia Militar dos Estados Unidos; D. J. Schlueter, da Universidade de Purdue; Charles S. Shapiro, da Universidade Estadual da Califórnia, São Francisco; Stanlei J. Shepherd, da Universidade Estadual da Pennsylvania; Dan Sober, da Universidade da Califórnia; Martin Tiersten, da CUNY; Miro M. Todorovich, do Colégio da Comunidade de Bronx; e Al Verone, do Colégio da Comunidade de Oakland.

Gostaria de agradecer aos alunos da Universidade de Oakland e do Instituto de Tecnologia Rose-Hulman, que utilizaram as edições e esboços preliminares, e que fizeram o tipo de crítica que somente os estudantes podem fazer. A edição preliminar foi habilmente batida por La Verna Cole e o manuscrito final, assim como vários preliminares, por Sue Nast. Agradeço à minha mulher Sue pelo apoio contínuo e pelo trabalho especial na feitura do índice. Finalmente, recebi muito apoio e encorajamento dos editores Worth Publishers.

PAUL A. TIPLER

Índice

1 Introdução, 1
- 1.1 Modelos mecânicos, 2
- 1.2 Matemática e física, 3
- 1.3 Como aprender física, 4
- 1.4 Unidades, 5
- 1.5 Conversão de unidades, 6
- 1.6 Dimensões das grandezas físicas, 7
- 1.7 Revisão de trigonometria, 8
- 1.8 O binômio de Newton, 13

Revisão, exercícios e problemas, 14

2 Movimento em uma dimensão, 18
- 2.1 Deslocamento e velocidade média, 19
- 2.2 Velocidade instantânea, 21
- 2.3 Aceleração, 25
- 2.4 Determinação de *x (t)* a partir de *v (t):* o problema da condição inicial, 28
- 2.5 A antiderivada e a integração, 29
- 2.6 Movimento uniformemente acelerado, 32
- 2.7 A diferencial, 36

Revisão, exercícios e problemas, 38

3 Movimento em duas e três dimensões, 48
- 3.1 O vetor deslocamento, 49
- 3.2 Componentes de um vetor, 50
- 3.3 Propriedades dos vetores, 53
- 3.4 O vetor velocidade, t5
- 3.5 O vetor aceleração, 58
- 3.6 Movimento uniformemente acelerado: movimento dos projetis, 58
- 3.7 Movimento circular uniforme, 65
- 3.8 Movimento circular não-uniforme, 68
- 3.9 Vetores unitários radial e tangencial, 69

Revisão, exercícios e problemas, 71

4 As leis de Newton, 79
4.1 Força, 80
4.2 Massa, 84
4.3 A segunda lei de Newton, 85
4.4 Peso, 86
4.5 Unidades de força e de massa, 88
4.6 A terceira lei de Newton e a conservação do momento, 90
4.7 Referenciais, 94
Inserção: Isaac Newton (1642-1727) *I. Bernard Cohen,* **99**
Revisão, exercícios e problemas, 103

5 Aplicações das leis de Newton, 110
5.1 Movimento linear com forças constantes, 110
5.2 Movimento circular, 119
5.3 Empuxo nos fluidos; princípio de Arquimedes, 122
5.4 Movimento com força retardadora proporcional à velocidade, 126
Revisão, exercícios e problemas, 129

6 Forças naturais, 140
6.1 A gravidade, 140
6.2 Forças eletromagnéticas, 145
6.3 Forças nucleares, 147
6.4 Forças moleculares, 148
6.5 Molas e cordas, 150
6.6 Forças de contato e atrito, 151
6.7 Forças inerciais, 154
Inserção: Ventos *Richard Goody,* **158**
Revisão, exercícios e problemas, 161

7 Trabalho e energia, 169
7.1 Trabalho em uma dimensão, 169
7.2 Trabalho realizado pela força resultante; energia cinética, 171
7.3 Trabalho e energia em três dimensões, 175
7.4 Energia potencial, 178
7.5 Trabalho e energia, 179
Inserção: Fontes de energia *Laurent Hodges,* **180**
7.6 Potência, 183
7.7 Produto escalar de dois vetores, 184
7.8 Prova de distributividade do produto escalar, 186
Revisão, exercícios e problemas, 187

8 Energia potencial e forças conservativas, 193
8.1 Forças conservativas, 193
8.2 Conservação da energia mecânica, 195
8.3 Forças conservativas e energia potencial em uma dimensão, 196
8.4 Forças não-conservativas (dissipativas) em uma dimensão, 199
8.5 Forças conservativas e energia potencial em três dimensões, 200
8.6 O elétron-volt, unidade de energia, 205
8.7 Força a partir da energia potencial, 206
8.8 Equilíbrio e energia potencial em uma dimensão, 207
8.9 Energia potencial dum sistema de partículas, 208
8.10 Critério geral para uma força ser conservativa, 210
Revisão, exercícios e problemas, 211

9 Conservação da energia, 218
9.1 Alguns exemplos ilustrativos, 220
9.2 Velocidade de escape e energia de ligação, 229
Inserção: Evaporação atmosférica *Richard Goody,* **233**
9.3 A equação de Bernoulli, 235
Revisão, exercícios e problemas, 239

10 Sistema com várias partículas, 246
10.1 Centro de massa, 247
10.2 Conservação do momento linear, 252
10.3 O referencial do centro de massa, 254
10.4 Energia cinética dum sistema de partículas, 255
10.5 Determinação do centro de massa, 257
10.6 Cálculo do centro de massa, mediante integração, 260
Revisão, exercícios e problemas, 261

11 Colisões e reações, 267
11.1 Impulso, 267
11.2 Média temporal de uma força, 268
11.3 Pressão de um gás, 270
11.4 A aproximação do impulso, 272
11.5 Variações de energia nas colisões; referenciais, 273
11.6 Colisões perfeitamente elásticas em uma dimensão, 274
11.7 Colisões elásticas em três dimensões, 279
11.8 Colisões perfeitamente inelásticas, 281
11.9 Limiar de reação, 282
11.10 Coeficiente de restituição, 284
Revisão, exercícios e problemas, 286

12 Rotação dum corpo rígido em torno de um eixo fixo, 294
12.1 Velocidade angular e aceleração angular, 295
12.2 A natureza vetorial da rotação, 298
12.3 Energia cinética rotacional e momento de inércia, 300
12.4 Cálculo do momento de inércia, 301
12.5 Torque, 307
12.6 Equilíbrio estático de um corpo rígido, 311
Revisão, exercícios e problemas, 313

13 Rotação no espaço e momento angular, 320
13.1 O torque como produto vetorial, 320
13.2 Momento angular de uma partícula, 321
13.3 Torque e momento angular num sistema de partículas, 324
13.4 Conservação do momento angular, 327
13.5 Translação e rotação, 329
13.6 Movimento dum giroscópio, 332
13.7 Desequilíbrio estático e dinâmico, 334
13.8 Dedução das relações entre o torque e o momento angular em relação ao centro de massa, 336
Revisão, exercícios e problemas, 338

14 Oscilações, 344
14.1 Movimento harmônico simples, 344
14.2 Movimento circular e movimento simples, 347
14.3 Corpo preso a uma mola, 348
14.4 O pêndulo simples, 352
14.5 O pêndulo físico, 357
14.6 Massa suspensa em mola vertical, 358
14.7 Movimento geral nas vizinhanças do equilíbrio, 359
14.8 Combinação de dois movimentos harmônicos simples, 361
Revisão, exercícios e problemas, 362

15 Oscilações amortecidas e oscilações forçadas, 369
15.1 Oscilações amortecidas, 370
15.2 Oscilações forçadas, 373
15.3 Oscilações forçadas, com amortecimento, 374
Revisão, exercícios e problemas, 377

16 Gravitação, 380
16.1 As leis de Kepler, 380
Inserção: Cometas *Stephen P. Maran,* **382**
16.2 A experiência de Cavendish, 384
16.3 O campo gravitacional, 385
16.4 Potencial gravitacional, 387
16.5 Linhas de força, 388
16.6 O campo gravitacional de uma distribuição de massa esferossimétrica, 389
16.7 Dedução do campo gravitacional de uma casca esférica, mediante o cálculo integral, 392
Revisão, exercícios e problemas, 394

17 Temperatura, 399
17.1 Variáveis macroscópicas de estado, 399
17.2 Paredes adiabáticas e diatérmicas, 401
17.3 A anteprimeira lei da termodinâmica, 402
17.4 Escalas de temperaturas e termômetros, 403
17.5 Unidades de pressão, 407
17.6 As escalas Celsius, Kelvin, Fahrenheit e Rankine, 408
17.7 Equações de estado; gases ideais, 410
17.8 Interpretação molecular da temperatura, 412
17.9 Expansão térmica, 413
Revisão, exercícios e problemas, 416

18 Calor, trabalho e a primeira lei da termodinâmica, 421
18.1 Capacidade calorífica e calor específico, 422
18.2 Calor latente, 425
18.3 A primeira lei da termodinâmica, 426
18.4 Trabalho e diagrama PV de um gás, 429
18.5 Energia interna de um gás, 432
18.6 Capacidades caloríficas de um gás ideal, 434
18.7 A equipartição da energia, 435
18.8 Expansão quase-estática adiabática de um gás ideal, 440
Revisão, exercícios e problemas, 441

19 A disponibilidade da energia, 447
19.1 Máquinas térmicas e a segunda lei da termodinâmica, 448
19.2 Equivalência entre os enunciados de Kelvin-Planck e de Clausius, 490
19.3 Reversibilidade, 451
19.4 O ciclo de Carnot, 454
19.5 A escala absoluta de temperatura, 456
Inserção: Usinas térmicas e poluição *Laurent Hodges,* **459**
19.6 Entropia, 461
19.7 Variação de entropia do universo, 464
19.8 Entropia e disponibilidade de trabalho, 466
19.9 Interpretação molecular da entropia, 467
19.10 Prova de que a entropia existe e de que a entropia do universo não pode diminuir, 469
Revisão, exercícios e problemas, 471

APÊNDICE A Unidades SI, 477
Unidades fundamentais, 477
Unidades derivadas, 477

APÊNDICE B Dados numéricos, 478
Constantes físicas, 478
Dados referentes à Terra, 479
Dados astronômicos, 480
Densidade de algumas substâncias em CNTP, 480

APÊNDICE C Fatores de conversão, 482

APÊNDICE D Símbolos e fórmulas matemáticos, 483
Símbolos e abreviaturas matemáticos, 483
Raízes da equação do segundo grau, 483
Expansão do binômio de Newton, 483
Fórmulas trigonométricas, 484
Funções exponencial e logarítmica, 484

APÊNDICE E Derivadas e integrais, 485
Propriedades das derivadas e derivadas de algumas funções, 485
Fórmulas de integração, 488

APÊNDICE F Tábua trigonométrica, 489

APÊNDICE G Tabela periódica dos elementos, 491

RESPOSTAS, 493

ÍNDICE ALFABÉTICO

1

Introdução

O homem sempre foi curioso sobre o mundo que o cerca. Desde os primeiros documentos do seu pensamento, sempre procurou impor uma ordem à espantosa diversidade de fenômenos naturais observados. Esta procura de uma ordem assume diversas formas. Uma delas é a religião; outra, a arte; uma terceira, a ciência. A palavra ciência origina-se de um verbo latino que significa "conhecer", mas ciência não é apenas conhecimento, porém conhecimento específico do mundo natural e, mais significativamente, um corpo de conhecimento organizado de maneira particular e racional.

Apesar de as raízes da ciência serem tão profundas quanto as da religião ou as da arte, as suas tradições são muito mais modernas. Somente nos últimos séculos passaram a existir métodos para estudar sistematicamente a natureza, os quais incluem técnicas de observação, regras de raciocínio e de previsão, a idéia de experiências planificadas e formas para comunicar os resultados experimentais e teóricos — tudo englobado no que se chama, em geral, *método científico*. Parte essencial do progresso no entendimento da natureza é a comunicação livre dos resultados experimentais, dos cálculos teóricos, das especulações e dos resumos do conhecimento. Um livro-texto é uma destas formas. Quando é elementar, como este, tem dois objetivos: em primeiro lugar, visa a introduzir o iniciante num campo científico cujo conteúdo já é amplamente conhecido pelos cientistas e técnicos e que formará a base de estudos mais avançados. Em segundo lugar, também serve para o estudante, que não vai se graduar em ciências físicas, ficar conhecendo fatos e formas de pensar que têm um grande efeito sobre o nosso modo de vida.

Este livro concentra-se na *física clássica*, cujo conteúdo usualmente abarca a mecânica, a óptica, o calor, a acústica, a eletricidade e o magnetismo, temas sobejamente compreendidos no final do século XIX, antes do advento da relatividade e da teoria quântica, que foram desenvolvidas nos primeiros anos do século XX. A aplicação da relatividade restrita, e especialmente da teoria quântica, à descrição de sistemas microscópicos como átomos, moléculas e núcleos, e à compreensão detalhada dos sólidos, líquidos e gases é, freqüentemente, denominada *física moderna*. Apesar de a física moderna ter feito importantes contribuições à tecnologia, a grande massa de conhecimento e de práticas tecnológicas é baseada diretamente na física clássica. Embora utilizando fundamentalmente a física clássica, discutiremos com freqüência modificações decorrentes da teoria quântica ou da relatividade restrita, e faremos a comparação das predições das te-

orias clássicas e modernas, umas com as outras, e com os resultados experimentais.

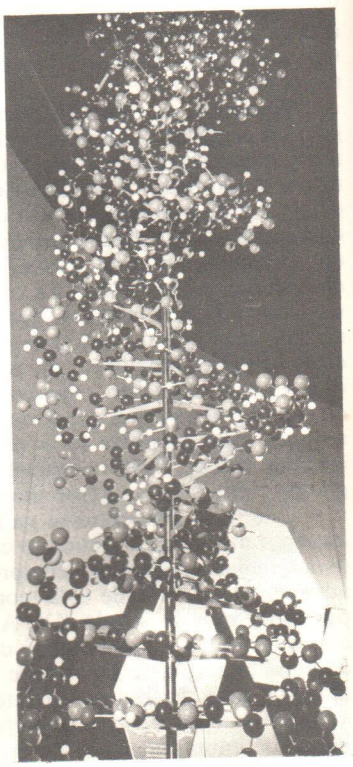
Exceto quanto a fenômenos no interior dos átomos, e no caso de movimentos com velocidades próximas à da luz, a física clássica descreve, correta e precisamente, o comportamento do mundo físico. Foi através da física clássica que pudemos explorar, frutiferamente, os recursos naturais; será através de aplicações da física clássica que encontraremos os meios técnicos necessários para preservar o meio ambiente natural e para utilizá-lo, no futuro, com sucesso e controle. Além disso, a física moderna ergue-se sobre os conceitos da física clássica, sem os quais não pode ser entendida. Consideremos, por exemplo, a descrição moderna do átomo. Na primeira teoria atômica a obter êxito, a de Bohr, de 1913, o átomo era imaginado como um sistema solar em miniatura, com os elétrons girando em torno do núcleo, em órbitas circulares ou elípticas. A atração do elétron pelo núcleo era descrita na teoria clássica da eletricidade. O fato de as órbitas serem circulares ou elípticas era conseqüência direta das leis da mecânica de Newton. Na teoria de Bohr, os princípios clássicos da *conservação da energia mecânica* e do *momento angular* eram princípios fundamentais. Na teoria quântica moderna do átomo, o elétron é representado por um *pacote de onda*. A energia do átomo é *quantificada*, admitindo-se que a *função de onda* do elétron obedece a uma condição de *onda estacionária*. Como na teoria de Bohr, a *conservação da energia* determina as *energias da radiação* que podem ser emitidas ou absorvidas quando o átomo muda de *estado*. Quando o átomo está num *campo magnético*, o *espectro de energia* é ligeiramente diferente. Esta diferença está relacionada com a freqüência com que o vetor do *momento magnético* precessa em torno da direção do *campo magnético*, devido ao *par de torção* que o *campo* exerce sobre o átomo. Esta precessão é análoga à de um pião ou à de um giroscópio.

Muitos dos conceitos mencionados no parágrafo anterior são, possivelmente, desconhecidos para o leitor. Não seja isto que o amofine. Todos eles — momento angular, energia, energia potencial, par de torção, precessão, pacote de onda, função de onda, onda estacionária, conservação de energia, campo magnético — são conceitos da física clássica que discutiremos neste livro. Com o entendimento completo destes conceitos, e familiaridade sobre o papel que têm na física clássica, o estudante estará com bases sólidas para enfrentar a teoria moderna do átomo e qualquer outro tópico da física moderna.

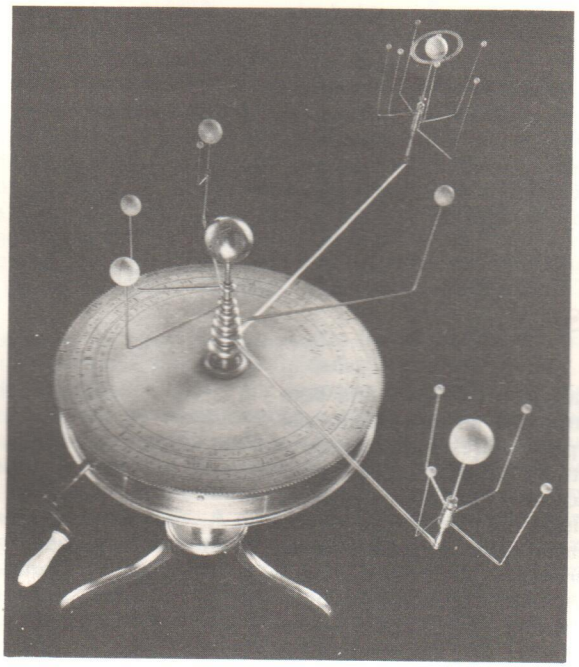
1.1 Modelos mecânicos

A mecânica clássica — interessante por direito próprio — é um tema particularmente bom para começar. É um tema menos abstrato que os campos elétricos e magnéticos, pois muito da nossa experiência quotidiana é diretamente mecânica. Muitos conceitos abstratos da física, como energia potencial, são mais fáceis de apreender nos quadros da mecânica clássica. Mas ela é, também, importante por outras razões. Muitas teorias microscópicas modernas da matéria são enunciadas em termos de modelos mecânicos, como o modelo atômico de Bohr, mencionado anteriormente. Dizemos, por exemplo, que o momento magnético do elétron precessa como um pião. Num modelo dos sólidos, muito útil, imaginamos os átomos ligados por pequenas molas, e as vibrações atômicas acopladas da mesma maneira que os osciladores mecânicos. Por isso, a teoria mecânica clássica das oscilações é fundamental na teoria moderna dos sólidos.

Há uma grande economia nos métodos da física. Imagine o movimento de um corpo ligado a uma mola, que investigaremos em detalhe no estudo do movimento harmônico simples. Posteriormente, estudaremos outros tipos de oscilação e de ressonância. O que aprendermos nestes estudos será diretamente aplicável a muitos outros fenômenos. Por exemplo, o comportamento de circuitos elétricos com capacitância, indutância e resistência é descrito exatamente pela mesma equação que a do movimento da massa ligada à mola. A troca entre a energia elétrica no capacitor e a energia magnética no indutor é análoga à permuta entre a energia potencial e a energia cinética do movimento da mola; a dissipação de energia no resistor é análoga à dissipação de energia pelo atrito na mola. A mesma



Modelo mecânico de molécula de DNA.



Modelo mecânico, do séc. XVIII, do Sistema Solar. *(Cortesia da Harvard University.)*

investigação do movimento ondulatório feita para o movimento harmônico simples de um segmento de mola com ondas estacionárias é aplicada para as oscilações das partículas de ar durante a passagem duma onda sonora ou, ainda, para as oscilações dos vetores elétrico e magnético numa onda luminosa. Na teoria moderna da física, o conhecimento aprofundado do oscilador clássico é necessário em muitos problemas de mecânica quântica.

1.2 Matemática e física

As leis da física são generalizações de observações e de resultados experimentais. Por exemplo, a lei de Newton da gravitação universal foi baseada em diversas observações: a trajetória dos planetas no movimento em torno do sol, a aceleração da queda dos corpos nas vizinhanças da terra, a aceleração da lua em sua órbita, as variações diárias e sazonais das marés etc. Usualmente as leis físicas se exprimem como equações matemáticas.[1] A lei da gravitação afirma que dois corpos se atraem com uma força que é proporcional à massa de cada um e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles. Escreve-se $F = Gm_1m_2/r^2$. A equação pode ser utilizada para fazer previsões sobre outros fenômenos e testar o intervalo de validade da lei. Por exemplo, a lei da gravitação de Newton, bem como suas leis do movimento podem ser utilizadas em conjunto para prever a órbita dos planetas, dos cometas e dos satélites. A compreensão destas previsões exige o conhecimento de cálculo diferencial e integral, como também a capacidade de manipular e resolver equações diferenciais simples, pois as leis do movimento são expressas como equações diferenciais de segunda ordem. As equações matemáticas do movimento ondulatório são equações diferenciais parciais. Por isso, para compreender a física acima de níveis simplesmente qualitativos, é necessário o emprego de razoável quantidade de procedimentos matemáticos. Em geral, é mais fácil aprender a física e a matemática necessárias simultaneamente, pois a aplicação imediata da matemática às situações físicas ajuda a entender, a um

[1] Algumas leis se exprimem como desigualdades matemáticas. Por exemplo, a segunda lei da termodinâmica pode ser enunciada: a variação de entropia do universo, em qualquer intervalo de tempo, é sempre maior que, ou igual a, zero.

só tempo, a física e a matemática. Neste livro, admitimos que o estudante já teve, ou está tendo, o curso de cálculo diferencial e integral. Boa parte do cálculo necessário à compreensão da física é apresentada esquematicamente. Uma vez que o cálculo é instrumento novo, ou estranho, para a maioria dos alunos que inicia o estudo da física, utilizamo-lo da maneira mais simples possível. Sendo este um livro sobre física, e não sobre matemática, os detalhes e o rigor matemáticos não são acentuados. Em problemas matemáticos difíceis, utilizamos argumentos razoáveis em lugar de deduções rigorosas, para fazer apelo à intuição do estudante.

1.3 Como aprender física

Um livro-texto é apenas uma ferramenta para aprender física. Um bom professor, demonstrações de classe, filmes, trabalho no laboratório são também indispensáveis. A leitura de textos suplementares é altamente recomendável. Enquanto o aluno estiver concentrado na tarefa de conseguir uma compreensão rigorosa da física clássica, no curso introdutório, deverá estar ampliando a sua familiaridade com a física contemporânea, lendo amplamente nos textos de divulgação da ciência moderna, como os do *Scientific American, Ciência e Cultura, Bild der Wissenchaft, Science* etc.

No fim de cada capítulo encontram-se perguntas, exercícios e problemas. Não se pode exagerar a importância da resolução de problemas no aprendizado da física. Somente nesta tarefa é possível perceber se o material teórico foi realmente assimilado. O estudante deve fazer quantos problemas puder, obrigatórios ou não. Um processo de ganhar prática e experiência na resolução de problemas é utilizar exemplos do texto como problemas. Leia o enunciado ou a questão do exemplo e procure reproduzir a dedução ou responder à pergunta, sem consultar o texto. Quando terminar, ou caso fique num beco sem saída, consulte o exemplo resolvido. Desta forma ficarão patentes o grau da sua compreensão do texto e os enganos que estiver cometendo. (Não fique desencorajado se muitas vezes empacar. Apesar de muitos exemplos serem aplicações diretas do assunto discutido no texto, alguns introduzem um novo método de solução ou de abordagem. Alguns poucos são resultados famosos e, na verdade, constituem extensões do texto. Nestes casos, não se pode esperar que o estudante reproduza sem dificuldade o exemplo na primeira tentativa.)

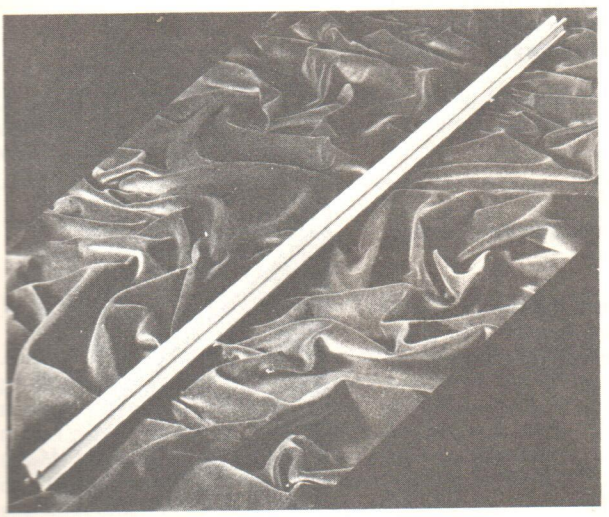
Ao longo do texto estão distribuídas perguntas. Algumas são muito fáceis e foram respondidas na discussão precedente. Caso o leitor tenha entendido a discussão, será capaz de respondê-las sem dificuldade. Outras perguntas pretendem ampliar ou aplicar a discussão do texto. Algumas não têm respostas simples e constituem material para pensar. Esteja ou não o aluno tendo um curso simultâneo de laboratório, deverá estar atento para experiências e observações simples que relacionam os conceitos do livro à própria experiência no mundo real. As perguntas devem estimular a sua capacidade de correlacionar o estudo à experiência quotidiana.

É possível enunciar as leis da física em proposições e equações concisas e, sob diversas condições, utilizá-las para deduzir o comportamento de muitos sistemas. Apesar de haver um certo apelo estético nesta abordagem dedutiva, não é uma forma fácil de aprender física ou de desenvolver uma compreensão sobre o funcionamento da natureza. O que conhecemos atualmente sobre ela é o resultado dos esforços de muitas pessoas diferentes, de muitos anos de experiências, de propostas teóricas e de debates. Algumas vezes, a discussão da história de uma idéia ajuda-nos a compreender o ponto de vista aceito na atualidade. A consideração de casos muito especiais pode ser uma preliminar útil da discussão geral de uma lei física. Por exemplo, a familiaridade com muitos conceitos novos pode ser adquirida pelo estudo de problemas unidimensionais. A extensão a três dimensões é, então, muito mais fácil do que seria a abordagem direta do problema geral tridimensional. Consideraremos o movimento unidimensional em primeiro lugar, para introduzir os conceitos de velocidade e aceleração, antes de generalizar para o movimento em duas e três dimensões. Da mesma maneira, as idéias de trabalho, energia potencial, forças conservativas, e muitas propriedades das ondas são introduzidas em uma dimensão antes de se tratar da situação geral, em três dimensões.

1.4 Unidades

As leis da física exprimem relações entre grandezas físicas como comprimento, tempo, força, energia e temperatura. A medição de uma destas grandezas envolve a comparação com algum valor unitário da grandeza. A medida mais elementar é provavelmente a de distância. Para medir a distância entre dois pontos é necessário uma unidade padrão, uma régua de metro, por exemplo. O enunciado de ser uma certa distância igual a 25 metros significa que ela é igual a 25 vezes o comprimento da régua, isto é, a régua cabe 25 vezes na distância. É importante incluir a unidade metro junto com o número 25 para exprimir a distância, pois outras unidades de distância são comumente utilizadas. Dizer que a distância é 25 não tem sentido.

As unidades de todas as quantidades físicas podem ser expressas em termos de um pequeno número de unidades fundamentais. Por exemplo, a unidade de velocidade, metro por segundo ou quilômetro por hora, envolve uma unidade de comprimento e outra de tempo. Analogamente, qualquer unidade de energia pode ser expressa em termos de unidades de comprimento, de tempo e de massa. Na verdade, todas as grandezas que aparecem no estudo da mecânica podem ser expressas em termos destas três unidades fundamentais. A escolha dos padrões destas grandezas fundamentais determina o sistema de unidades de todas as grandezas mecânicas. No sistema utilizado universalmente na comunidade científica, que utilizaremos quase exclusivamente, o padrão de comprimento é o metro, o de tempo, o segundo e o de massa, o quilograma. Este sistema é denominado o sistema mks (de metro, m; quilograma, kg; segundo, s). O padrão de comprimento, o metro (simbolizado por m), era originalmente definido como a distância entre dois traços numa barra de platina e irídio, guardada no Bureau Internacionel de Poids et Mesures, em Sèvres, na França. A extensão foi escolhida de forma que a distância entre o equador e o pólo norte, medida ao longo do meridiano de Paris, fosse de 10 milhões de metros (Fig. 1.1). (Depois da construção da barra padrão, verificou-se que esta distância era alguns centésimos por cento diferente de 10^7m.) O metro padrão foi utilizado para construir padrões secundários, que são utilizados para calibrar réguas de medida em todo o mundo. Este metro é atualmente definido com relação ao comprimento de onda de uma linha espectral determinada de um isótopo do criptônio; ele vale 1.650.763,73 vezes este



Metro padrão, depositado no National Bureau of Standards, Washington, D. C., padrão americano de comprimento de 1893 a 1960. A barra, feita de liga de platina e irídio, é cópia exata do metro padrão internacional, que está em Sèvres, França. *(Cortesia do National Bureau of Standards.)*

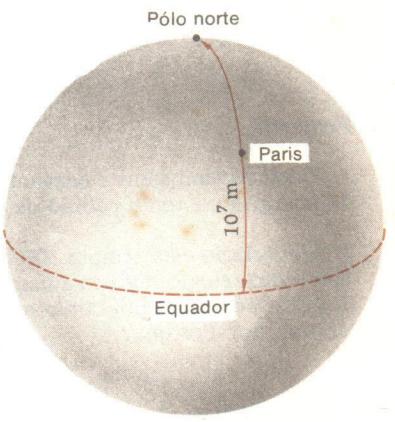


Fig. 1.1 O metro, padrão de comprimento, foi escolhido de forma a ser igual a 10^7 metros à distância do pólo norte ao equador, medida ao longo do meridiano de Paris. A circunferência da Terra é, portanto, $4 \cdot 10^7$ m e o raio $(2 \cdot 10^7/\pi)$ m $= 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

comprimento de onda. Tal modificação facilitou a comparação de comprimentos em todo o mundo, além de torná-la mais precisa.

A unidade de tempo, o segundo (símbolo s), foi definida originalmente em termos da rotação da terra, e valia (1/60)(1/60)(1/24) vezes a duração do dia solar médio. Atualmente, o segundo é definido em termos de uma freqüência característica associada ao átomo de césio.

A unidade de massa, o quilograma (símbolo kg), vale 1.000 gramas (símbolo g) e é definida como a massa de um cilindro determinado, também guardado em Sèvres. Discutiremos detalhadamente o conceito de massa no Capítulo 4.

As unidades das outras grandezas da mecânica, como velocidade e quantidade de movimento, são derivadas destas três unidades fundamentais: de comprimento, de tempo e de massa. A escolha destas como fundamentais é um tanto arbitrária. Poderíamos, por exemplo, escolher um padrão de velocidade em lugar do padrão de comprimento, como a velocidade da luz no vácuo, e dar a esta unidade um nome. A unidade de comprimento seria então derivada pelo produto desta unidade de velocidade pela unidade de tempo.

Ao estudar termodinâmica e eletricidade, necessitaremos de mais duas unidades físicas fundamentais, o kelvin (também chamado grau kelvin), unidade de temperatura, e o ampère, unidade de corrente elétrica. Estas cinco unidades fundamentais, o metro (m), o segundo (s), o quilograma (kg), o kelvin (K) e o ampère (A), constituem o sistema internacional de unidades, sistema SI.[1] A unidade de toda grandeza física pode ser expressa em termos destas unidades SI. Algumas combinações importantes recebem nomes especiais. Por exemplo, a unidade SI de força é o $kg \cdot m/s^2$, e se chama newton (N). Analogamente, a unidade SI de potência, $kg \cdot m^2/s^3 = N \cdot m/s$, é denominada watt (W). Os prefixos que nomeiam os múltiplos e submúltiplos das unidades SI estão no Quadro 1.1. Estes múltiplos são por fatores de 10, e por isso o sistema é *decimal*. O sistema decimal baseado no metro é o *sistema métrico*. Os prefixos podem ser aplicados a qualquer unidade SI. Por exemplo, 10^{-2} metros é 1 centímetro (cm); 10^{-3} watts vale 1 miliwatt (mW).

Um outro sistema de unidades é utilizado nos Estados Unidos, o sistema de unidades inglesas — baseado no pé, unidade de comprimento; na libra, unidade de força; e no segundo, unidade de tempo. Não tem curso legal no Brasil, embora seja utilizado na medição de grandezas encontradas em aplicações práticas. Não o utilizaremos neste livro.

Em engenharia usa-se, também, um sistema baseado no metro, no quilograma-força, unidade de força, e no segundo. É um sistema decimal bastante conveniente. Veremos, no Capítulo 4, que a massa é uma escolha preferível, como unidade fundamental, à força, pois pode ser definida sem referência ao campo gravitacional da Terra. Veremos, então, as relações entre estes sistemas.

Quadro 1.1 Prefixo das potências de 10

Múltiplo	*Prefixo*	*Símbolo*
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	quilo	k
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Perguntas

1. Quais as vantagens e desvantagens, em utilizar o comprimento do braço de uma pessoa como padrão de comprimento?

2. Um relógio está sempre 10% mais rápido que o relógio padrão de césio. Um outro relógio registra adiantamentos e atrasos ocasionais de 1%. Qual dos dois será mais útil como padrão secundário de medida do tempo num laboratório? Por quê?

Inscrição greco-romana, mostrando o comprimento do pé padrão, em 300-500 d.C. *(Cortesia do Science Museum,* Londres.)

1.5 Conversão de unidades

Dissemos que a medida de uma grandeza física deve incluir um número e uma unidade. Quando se adicionam, subtraem-se, multiplicam-se ou

[1] O sistema SI tem, a rigor, uma sexta unidade, a de intensidade luminosa, candela. Não a utilizaremos neste livro por falta de oportunidade.

dividem-se estas grandezas numa equação algébrica, a unidade pode ser tratada como qualquer outra grandeza algébrica. Por exemplo, suponhamos que se queira determinar a distância percorrida em três horas (3 h) por um automóvel que tem a velocidade constante de 60 quilômetros por hora (60 km/h). A distância x é o produto da velocidade v pelo tempo t:

$$x = vt = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times 3 \text{ h} = 180 \text{ km}$$

A unidade de tempo é cancelada, como qualquer outra grandeza algébrica o seria, e se obtém a distância na unidade conveniente de comprimento, o quilômetro. Este método torna fácil a conversão de uma unidade de distância em outra. Suponha que se queira converter 180 km a centímetros. Usamos o fato de ser

$$1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por 1 km, temos:

$$1 = 10^5 \text{ cm/km}$$

Pode-se agora passar 180 km para centímetros, multiplicando-se esta medida pelo fator 10^5 cm/km:

$$180 \text{ km} = 180 \text{ km} \cdot 10^5 \text{ cm/km} = 180 \cdot 10^5 \text{ cm}$$

Conservamos no resultado os três algarismos significativos da medida inicial (180) e não escrevemos $18 \cdot 10^6$ cm, o que diminuiria a precisão do resultado. O fator 10^5 cm/km é chamado um *fator de conversão*. Ele tem o valor igual à unidade e é utilizado para converter a medida de uma grandeza expressa numa unidade em outra medida equivalente, expressa numa segunda unidade. Escrevendo, no fator, as unidades explicitamente, não é preciso ficar pensando se é multiplicando ou dividindo por 10^5 que se faz a conversão de quilômetros para centímetros; as unidades escritas dizem logo se escolhemos o fator certo ou errado.

Exemplo 1.1 Qual é o equivalente de 60 km/h em centímetros por segundo?

Utilizamos o fator de conversão mencionando acima e mais as igualdades 60 s = 1 min e 60 min = 1 h. Então:

$$60 \text{ km/h} \cdot 10^5 \text{ cm/km} \cdot (1/60) \text{ h/min} \cdot (1/60) \text{ min/s} = 17 \cdot 10^2 \text{ cm/s}$$

A grandeza 60 km/h é multiplicada por uma seqüência de fatores de conversão, cada qual tendo o valor unitário, de forma que a medida da velocidade não é modificada.

1.6 Dimensões das grandezas físicas

A área de uma figura plana é encontrada pela multiplicação de um comprimento por outro. Por exemplo, a área de um retângulo com os lados medindo 2 m e 3 m é $A = (2 \text{ m})(3 \text{ m}) = 6 \text{ m}^2$. A unidade desta área é o metro quadrado. Por ser a medida da área o produto de dois comprimentos, diz-se que ela tem as *dimensões* de comprimento vezes comprimento, ou seja, comprimento ao quadrado, que se escreve L^2. A idéia de dimensão é facilmente estendida a outras grandezas. Por exemplo, a velocidade tem as dimensões de comprimento dividido por tempo, ou L/T. As dimensões de qualquer grandeza da mecânica são escritas em termos das grandezas fundamentais de comprimento (L), tempo (T) e massa (M). A adição de duas grandezas físicas só tem sentido se elas tiverem as mesmas dimensões; não podemos adicionar uma área a uma velocidade para obter uma grandeza significativa. Se tivermos uma equação como as quantidades A,

$$A = B + C$$

B e C devem ter todas as mesmas dimensões. A adição de B e C requer que estas quantidades tenham as mesmas unidades. Por exemplo, se B for uma área de 500 m² e C uma outra de 50 km², devemos ou converter B a quilômetros quadrados, ou C a metros quadrados, antes de efetuar a soma.

Muitas vezes podemos encontrar enganos nos cálculos verificando as dimensões ou as unidades das grandezas que aparecem nas operações. Suponha, por exemplo, que estejamos utilizando a fórmula para uma distância x dada por

$$x = x_0 + vt + \tfrac{1}{2}at$$

onde t é o tempo, x_0 a distância inicial no tempo $t = 0$, v a velocidade, e a a aceleração (cuja dimensão, conforme veremos no próximo capítulo, é L/T^2, e a unidade SI é o metro por segundo por segundo, m/s²). Podemos ver, imediatamente, que esta fórmula não pode ser correta: x tem as dimensões de comprimento. As duas grandezas x_0 e vt também têm as dimensões de comprimento. As dimensões de $(1/2)\,at$ são $(L/T^2)T = L/T$. Uma vez que esta não é uma dimensão de comprimento, algum erro deve ter sido cometido na obtenção da fórmula.

A consistência dimensional é uma condição necessária para uma equação estar correta; naturalmente, não é suficiente. A equação pode ter as dimensões corretas em cada termo, sem descrever qualquer situação física real.

O conhecimento das dimensões das grandezas permite, freqüentemente, relembrar uma fórmula e, em alguns casos, descobri-la. Suponha que nos recordemos haver uma fórmula simples relacionando a velocidade de uma onda v (dimensões L/T), ao comprimento de onda λ[1] (dimensão L), e à freqüência f (dimensão T^{-1}). Só existe uma equação dimensionalmente consistente exprimindo uma destas quantidades como o produto das outras duas; é:

$$v = f\lambda$$

Esta equação, na verdade, está correta. Caso tivéssemos escrito $f = v\lambda$, poderíamos ver, graças às dimensões, que a expressão seria incorreta.

Perguntas

3. A velocidade v de um objeto que cai do repouso depende do tempo t e da aceleração da gravidade g (que é uma constante e tem as dimensões LT^{-2}). A partir de considerações dimensionais, qual será a relação possível entre v, g e t?

4. A distância da queda de um objeto d quando cai do repouso depende, também, do tempo t e da aceleração da gravidade g. Qual será a relação entre d, g e t?

1.7 Revisão de trigonometria

Uma vez que a trigonometria elementar é utilizada na análise de quase todos os problemas físicos o estudante deverá ser capaz de utilizá-la fácil, rápida e corretamente. Com prática, o físico ou o engenheiro pode manipular a trigonometria elementar com a mesma facilidade com que a álgebra ou a aritmética. Esta seção dá os principais resultados da trigonometria usados em física. O estudante deve percorrê-la toda, para ficar seguro de estar familiarizado com os resultados. Caso sejam encontradas observações desconhecidas, é necessário estudá-las cuidadosamente. A seção pode ser uma referência útil para o estudo posterior.

O ângulo feito pela interseção de duas retas é medido da seguinte maneira. As duas linhas são ligadas por um segmento de arco de circunferência de círculo, cujo centro está na interseção das retas (v. Fig. 1.2). A medida do ângulo é a razão entre o comprimento do arco e o raio. Esta

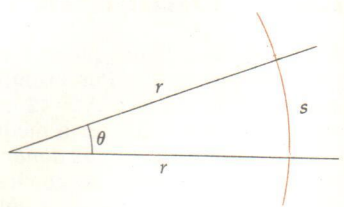


Fig. 1.2 O ângulo θ é definido como a razão s/r, onde s é o comprimento do segmento de arco interceptado num círculo de raio r. O ângulo assim definido é medido em radianos.

[1] Letra grega lambda. O alfabeto grego completo aparece na contracapa inicial.

razão é constante, qualquer que seja o arco. Sendo r o raio e s o comprimento do arco, o ângulo θ é dado por

$$\theta = \frac{s}{r} \tag{1.1}$$

Definição de ângulo

O ângulo medido desta forma está em *radianos* (rad). Sendo a razão entre dois comprimentos, é grandeza adimensional. O radiano, portanto, é uma unidade adimensional. Pode ser ignorado na análise dimensional. A medida mais familiar de ângulo é o grau (sexagesimal) definido como o ângulo que subtende um arco s cujo comprimento é igual a 1/360 do comprimento da circunferência do círculo. Uma vez que esta circunferência tem o comprimento de $2\pi r$, o ângulo subtendido por toda a circunferência, em radianos, é $2\pi r/r = 2\pi$. O grau e o radiano estão relacionados por

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

ou

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57{,}3° \tag{1.2}$$

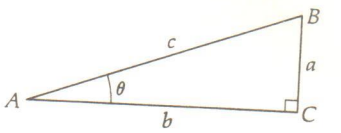


Fig. 1.3 Triângulo retângulo utilizado para definir as funções trigonométricas sen θ, cos θ e tan θ.

A Figura 1.3 mostra um triângulo retângulo formado pela perpendicular BC à linha AC. Os comprimentos dos lados são a, b e c. As funções trigonométricas sen θ, cos θ e tan θ são definidas, para o ângulo θ por

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \tag{1.3}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Definição das funções trigonométricas

As outras três funções trigonométricas são definidas pelo inverso destas funções:

$$\sec \theta = \frac{c}{b} = (\cos \theta)^{-1} \quad \text{cosec } \theta = \frac{c}{a} = (\text{sen } \theta)^{-1};$$

$$\cot \theta = \frac{b}{a} = (\tan \theta)^{-1} = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

Não são muito utilizadas em física. O teorema de Pitágoras dá algumas identidades úteis:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.4}$$

Dividindo ambos os membros por c^2, obtemos

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \tag{1.5}$$

e da definição de sen θ e cos θ,

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \tag{1.6}$$

da mesma maneira, dividindo cada membro da Equação 1.4 por a^2 ou por b^2, obtêm-se

$$1 + \cot^2 \theta = \text{cosec}^2 \theta \tag{1.7}$$

e

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \tag{1.8}$$

Exemplo 1.2 Utilize o triângulo retângulo isósceles da Figura 1.4 para encontrar o seno, o co-seno e a tangente de 45°.

É óbvio que os dois ângulos agudos do triângulo são iguais. Uma vez que a soma dos três ângulos é igual a 180°, e o ângulo reto mede 90°, cada ângulo agudo vale 45°. Multiplicando-se cada lado do triângulo por um mesmo fator, obtém-se um triângulo semelhante ao inicial, com os mesmos ângulos. De vez que as funções trigonométricas só envolvem razões entre os lados do triângulo retângulo, podemos escolher qualquer comprimento como conveniente para um dos lados. Imaginemos que os catetos tenham o comprimento de uma unidade. O comprimento da hipotenusa é dado pelo teorema de Pitágoras (Equação 1.4):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ unidades.}$$

As funções trigonométricas para o ângulo de 45° são, portanto, as dadas pela Equação 1.3:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1{,}00$$

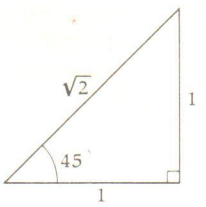


Fig. 1.4 Triângulo retângulo isósceles, para o Exemplo 1.2. Este triângulo tem os ângulos 45°, 45° e 90°.

Exemplo 1.3 O seno de 30° é exatamente igual a 1/2. Determinar a razão entre os catetos de um triângulo retângulo com um ângulo agudo de 30°.

Este triângulo aparece na Figura 1.5. Escolhemos como a unidade o comprimento do cateto oposto ao ângulo de 30°. A hipotenusa é obtida por ser sen 30° = 0,5 e

$$c = \frac{a}{\text{sen } 30°} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ unidades.}$$

O comprimento do cateto oposto ao ângulo de 60° é dado pelo teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$$

destes resultados, se obtêm as outras funções trigonométricas dos ângulos de 30° e 60°:

$$\text{cos } 30° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$

$$\tan 30° = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

$$\text{sen } 60° = \frac{b}{c} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$$

$$\cos 60° = \frac{a}{c} = \text{sen } 30° = \tfrac{1}{2} = 0{,}500$$

$$\tan 60° = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1{,}732$$

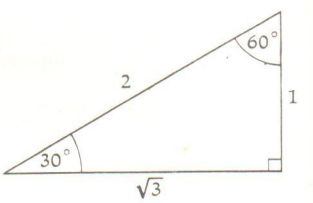


Fig. 1.5 Triângulo com ângulos de 30°, 60° e 90°, para o Exemplo 1.3.

O cálculo das funções trigonométricas pertinentes ao triângulo com os lados 3, 4 e 5 fica como um exercício para o leitor.

Quando o ângulo for pequeno, o comprimento de a é quase igual ao comprimento do arco s, conforme a Figura 1.6. Os comprimentos c e b são, também, quase iguais. O ângulo $\theta = s/c$ é, então, quase igual a sen $\theta = a/c$:

$$\text{sen } \theta \approx \theta, \text{ para } \theta \text{ pequeno.} \qquad 1.9$$

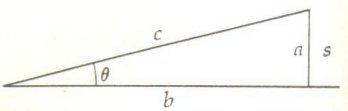


Fig. 1.6 Quando os ângulos são pequenos, $\theta = s/c$, sen $\theta = a/c$ e tan $\theta = a/b$ são aproximadamente iguais.

Aproximações para ângulos pequenos

Analogamente, tan $\theta = a/b$ e é quase igual a θ e a sen θ quando o ângulo for pequeno:

$$\tan\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \theta, \text{ para } \theta \text{ pequeno.} \qquad 1.10$$

Uma vez que $\cos\theta = b/c$, e estes comprimentos são quase iguais quando θ for pequeno, temos,

$$\cos\theta \approx 1, \text{ para } \theta \text{ pequeno.} \qquad 1.11$$

Estas aproximações só valem quando o ângulo θ for medido em radianos.

Exemplo 1.4 Qual a diferença entre sen θ, tan θ e θ, quando $\theta = 15^o$?

Este ângulo, em radianos, é

$$\theta = 15^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 0{,}262 \text{ rad}$$

Na tábua de funções trigonométricas encontram-se

$$\operatorname{sen} 15^o = 0{,}259; \quad \tan 15^o = 0{,}268$$

Então, a diferença entre sen θ e θ (em radianos) é 0,003, ou seja, cerca de 1%. A diferença entre tan θ e θ é 0,006, ou seja, cerca de 2%. Quando o ângulo é menor, a aproximação $\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta$ é ainda mais exata.

O exemplo mostra que se uma precisão da ordem de algumas partes em 100 for necessária, as aproximações podem ser utilizadas para ângulos de 15º para baixo. Na Figura 1.7 está o gráfico de θ, sen θ e tan θ contra θ, para pequenos valores de θ.

Outras identidades trigonométricas, que utilizaremos ocasionalmente, seguem-se diretamente das definições que apresentamos:

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2$$
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2 \qquad 1.12$$

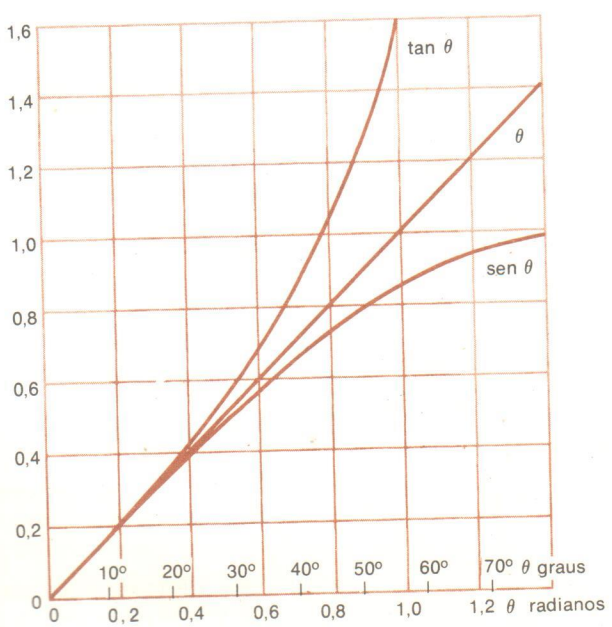


Fig. 1.7 Gráfico de sen θ, tan θ e θ, para valores pequenos de θ.

$$\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = 2\operatorname{sen}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

A Figura 1.8 mostra um ângulo obtuso com o vértice na origem e um lado ao longo do eixo do x. As funções trigonométricas definidas para este ângulo geral são:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{c} \qquad \cos\theta = \frac{x}{c} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{1.13}$$

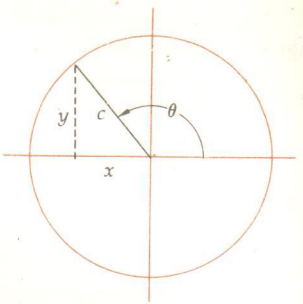


Fig. 1.8 Diagrama definidor das funções trigonométricas de um ângulo obtuso.

A Figura 1.9 mostra o gráfico destas funções contra o ângulo θ. Algumas relações úteis podem ser obtidas destes gráficos:

$$\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta; \quad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta;$$
$$\operatorname{sen}(\pi/2-\theta) = \cos\theta; \cos(\pi/2-\theta) = \operatorname{sen}\theta. \tag{1.14}$$

Todas as funções trigonométricas têm o período 2π. Isto é, quando um ângulo aumenta de 2π, ou de 360°, o valor inicial da função se reproduz. Assim, $\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$ etc.

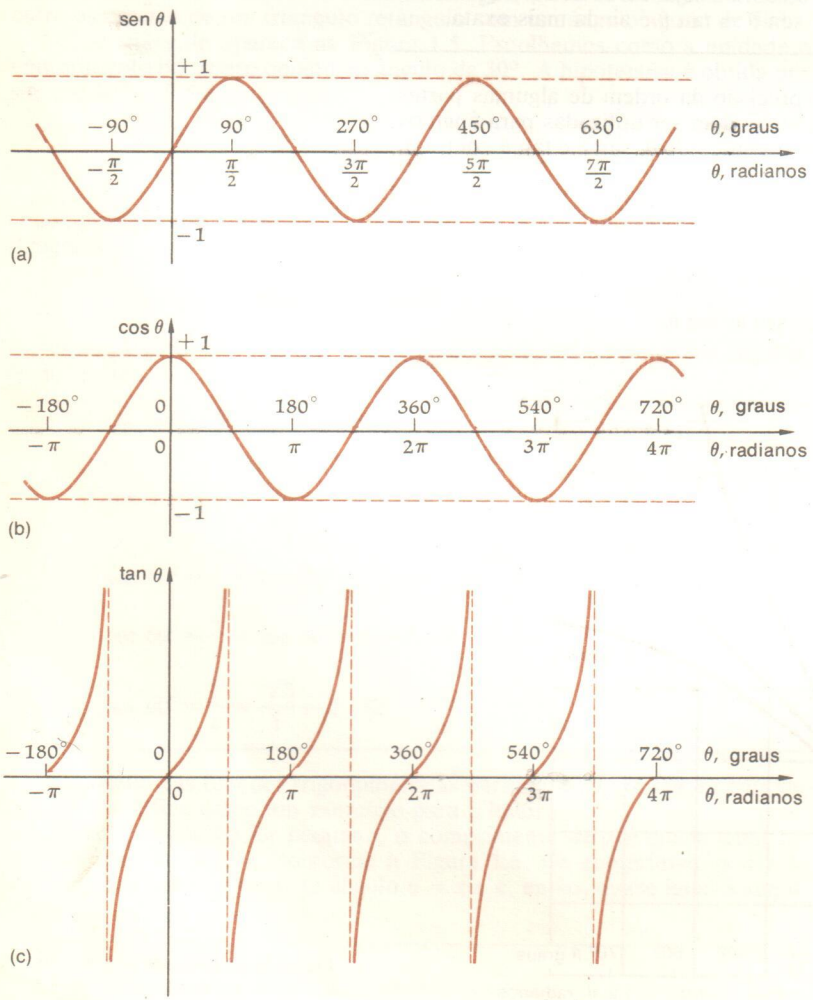


Fig. 1.9 Gráficos das funções sen θ, cos θ e tan θ contra θ.

1.8 O binômio de Newton

A fórmula da expansão do binômio de Newton é muito útil para fazer aproximações. Uma das suas expressões é,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{(3)(2)}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)(3)(2)}x^4 + \cdots \qquad 1.15$$

Quando n é um inteiro positivo, existem $n + 1$ termos nesta soma. Quando n é um número real, mas não inteiro e positivo, existe uma infinidade de termos na soma. A série converge (isto é, a soma dos seus termos tem um valor definido) para qualquer valor de n, desde que x^2 seja menor que a unidade. Converge também para $x^2 = 1$ quando n for positivo. A série é particularmente útil quando $|x|$ for muito menor que 1. Então, cada termo da Equação 1.15 é muito menor que o termo a que sucede, e podemos abandonar todos eles, exceto os primeiros dois ou três. Portanto, sendo $|x|$ muito menor que 1, teremos:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \qquad |x| << 1 \qquad 1.16$$

Aproximação do binômio

Exemplo 1.5 Utilizar a Equação 1.16 para encontrar o valor aproximado da raiz quadrada de 101.

Em primeiro lugar, é preciso formular o problema de maneira a ter uma expressão da forma $(1 + x)^n$, com x muito menor que a unidade:

$$(101)^{1/2} = (100 + 1)^{1/2} = (100)^{1/2}(1 + 0{,}01)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2}$$

Usa-se, agora, a Equação 1.16, com $n = 1/2$ e $x = 0{,}01$:

$$(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(0{,}01) = 1{,}005$$

$$(101)^{1/2} = 10(1 + 0{,}01)^{1/2} \approx 10(1{,}005) = 10{,}05$$

Podemos ter uma idéia da exatidão desta aproximação analisando o primeiro termo abandonado na Equação 1.15. Este termo é

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

Uma vez que o valor de x neste exemplo é 1% de 1, o valor de x^2 é 0,01% de 1. Abandonando este termo estamos incorrendo num erro da ordem de:

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \tfrac{1}{8}(0{,}01)^2 \approx 0{,}001\%$$

A nossa resposta estará certa dentro de uma aproximação de 0,001%. O valor real de $(101)^{1/2}$ é 10,049876. A diferença entre este valor e a nossa aproximação é 0,000125, que é cerca de 0,001% de 10,05.

Exemplo 1.6 Utilizando a aproximação sen $\theta \approx \theta$ e a fórmula $\cos\theta = (1 - \text{sen}^2\theta)^{1/2}$, determinar uma aproximação para cos θ, quando θ for pequeno.

Teremos:

$$\cos\theta = (1 - \text{sen}^2\,\theta)^{1/2} \approx (1 - \theta^2)^{1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(-\theta^2) = 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2$$

Esta aproximação é muitas vezes útil e melhor que a aproximação muito drástica, cos $\theta \approx 1$, da Equação 1.11.

Revisão

A) Defina, explique, ou comente cada um dos seguintes conceitos (os números referem-se às páginas do texto onde o termo é discutido ou definido):

Unidades, 5
Unidades derivadas, 6
Sistema métrico, 6
Unidades SI, 6
Sistema prático de unidades, 6
Fator de conversão, 7
Dimensões, 8
Unidades fundamentais, 5
Ângulo, 8
sen θ, 9
cos θ, 9
tan θ, 9
Aproximação para pequenos ângulos, 10
Teorema do binômio, 13

B) Certo ou errado. Diga se cada uma das afirmações seguintes é certa ou errada. Explique o seu raciocínio. Imagine quando possível um exemplo em apoio a uma afirmação verdadeira, e um exemplo contraditando uma afirmação falsa.

1. Duas quantidades que devem ser adicionadas devem ter as mesmas dimensões.

2. Duas quantidades que devem ser multiplicadas devem ter as mesmas dimensões.

3. Todos os fatores de conversão são idênticos à unidade.

4. Quando o ângulo θ é muito pequeno, sen θ e tan θ são aproximadamente iguais.

5. Quando o ângulo θ é muito pequeno, cos θ e θ são aproximadamente iguais.

Exercícios

Seção 1.4: Unidades; seção 1.5: Conversão de unidades; e seção 1.6: Dimensões das grandezas físicas

1. Nas equações seguintes, a distância x está em metros e o tempo t em segundos. Quais devem ser as unidades SI das constantes C_1, C_2 e C_3?

$$(a) \quad x = C_1 + C_2 t + C_3 t^2$$

$$(b) \quad x = C_1 \cos C_2 t$$

$$(c) \quad x = C_1 \text{ sen } C_2 t$$

Sugestão: os argumentos das funções trigonométricas e exponenciais devem ser adimensionais.

2. Quais as dimensões das constantes no Exercício 1?

3. Uma equação que relaciona a velocidade v à distância x é:

$$v^2 = C_1 x$$

(a) Quais as dimensões da constante C_1? *(b)* Quando a velocidade estiver em metros por segundo e a distância em metros, quais as unidades SI de C_1?

4. Quando x está em centímetros e t em segundos nas equações do Exercício 1, quais as unidades das constantes?

5. A velocidade de uma partícula em função do tempo, é dada por $v = C_1 \cos C_2 t$. Determinar as dimensões e as unidades SI das constantes C_1 e C_2.

6. A partir da definição original do metro — em termos da distância do equador ao pólo norte — determinar (em metros), *(a)* a circunferência da Terra; *(b)* o raio da Terra.

7. Determinar a circunferência e o raio da Terra em centímetros, convertendo as respostas do Exercício 6 a esta unidade.

8. Determinar o fator de conversão de quilômetros por hora a metros por minuto.

9. *(a)* Determinar o número de segundos em um ano. *(b)* Se fosse possível contar Cr$1,00 por segundo, quantos anos seriam necessários para contar uma quantia de um bilhão de cruzeiros? *(c)* Se fosse possível contar uma molécula por segundo, quantos anos seriam necessários para contar as moléculas de um mol? (O número de moléculas em um mol é o número de Avogadro e vale, $N_A = 6 \cdot 10^{23}$.)

10. A unidade SI de força, o quilograma-metro por segundo por segundo ($kg \cdot m/s^2$), é o newton (N). Determinar as dimensões e as unidades SI da constante G na lei da gravitação de Newton, $F = Gm_1m_2/r^2$.

11. Às vezes, um fator de conversão pode ser deduzido mediante o conhecimento de uma constante em dois sistemas diferentes. *(a)* A velocidade da luz no vácuo é $3 \cdot 10^8$m/s, o que equivale a $186 \cdot 10^3$ milhas por segundo. Deduza daí o número de quilômetros contidos numa milha. *(b)* O peso de um pé cúbico de água é 62,4 libras. De posse desta informação, e sabendo que 1 cm^3 de água tem a massa de 1 g e um pé tem 30,48 cm, determine qual o peso, em libras, de uma massa de 1 kg.

Seção 1.7: Revisão de trigonometria

12. Determinar o valor do ângulo reto, em radianos, a partir da definição $\theta = s/r$.

13. Determinar: *(a)* sen $\pi/2$; *(b)* cos $\pi/2$; *(c)* tan π; *(d)* tan $(\pi/4)$; *(e)* sen $(\pi/4)$; *(f)* cos $(3\pi/4)$.

14. Converter de radianos a graus: $(a)\ \pi/4$; $(b)\ 3\pi/2$; $(c)\ \pi/2$; $(d)\ \pi/6$; $(e)\ 5\pi/6$.

15. Converter de graus a radianos: *(a)* 60°; *(b)* 90°; *(c)* 30°; *(d)* 45°; *(e)* 180°; *(f)* 37°; *(g)* 720°.

16. Determinar os fatores de conversão de voltas por minuto a radianos por segundo e a graus por segundo.

17. Um disco gira à velocidade de 33,3 voltas por minuto. Determinar, em radianos e em graus, o ângulo de rotação do disco em 1 segundo.

18. O diâmetro de um disco é de 30,5 cm (12 polegadas) e ele gira à taxa de 33,3 voltas por minuto. *(a)* Qual a distância percorrida por um ponto da sua borda (medida ao longo do arco de círculo que ele descreve) durante uma volta? *(b)* Qual a velocidade deste ponto em centímetros por segundo?

19. Um triângulo retângulo tem os lados com 3, 4 e 5 metros. Sendo θ_1 o ângulo agudo menor e θ_2 o maior, determinar o seno, o co-seno e a tangente de cada um destes ângulos. Determine, mediante o Apêndice F, as medidas, em graus, destes ângulos.

20. Um triângulo retângulo tem os lados $a = 2$ cm; $b = 8$ cm; $c = ?$. *(a)* Determinar o comprimento da hipotenusa c. *(b)* Determinar o seno, o co-seno e a tangente dos ângulos do triângulo. *(c)* Determinar estes ângulos mediante o Apêndice F.

21. Utilize as aproximações para ângulos pequenos para determinar os valores aproximados de *(a)* sen 8° e *(b)* tan 5°. *Sugestão:* converter inicialmente os ângulos a radianos.

22. O ângulo subtendido pelo diâmetro da Lua, visto de um ponto sobre a superfície da Terra, é cerca de 0,524°. Utilize este fato e a informação de estar a Lua a $3{,}80 \cdot 10^5$ km da Terra, para calcular o diâmetro da Lua.

Seção 1.8: O binômio de Newton

EESC - USP
Biblioteca
CAMPUS DE S. CARLOS

23. Escreva a expressão completa da expansão do binômio de Newton (Equação 1.15) para $(1 + x)^3$, e confira o resultado fazendo a elevação ao cubo por multiplicação direta.

24. A quantidade $1/(1 + x)^2$ pode ser escrita como uma série infinita de potências assim: $1/(1 + x)^2 = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + \ldots + a_nx^n + \ldots$, onde os a_n são constantes. Determinar estas constantes mediante a Equação 1.15.

25. Utilize a aproximação $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, quando $|x| << 1$, para determinar os valores aproximados de: *(a)* $\sqrt{99}$; *(b)* 1/1,01; *(c)* $124^{1/3}$.

26. Utilize a aproximação $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ para determinar os valores aproximados de *(a)* $9{,}8^2$; *(b)* $0{,}999^5$; *(c)* $1{,}002^{-2}$.

Problemas

1. A seguinte tabela dá os resultados experimentais da medida do período do movimento T de um objeto de massa m suspenso a uma mola, em função da massa do objeto.

Massa, m kg	0,10	0,20	0,40	0,50	0,75	1,00	1,50
Período, T s	0,56	0,83	1,05	1,28	1,55	1,75	2,22

Estes dados são compatíveis com a equação simples que dá T em função de m na forma $T = Cm^n$, onde C e n são constantes, não sendo n necessariamente inteiro. *(a)* Determinar n e C. (Há vários métodos para fazer a determinação. Um deles, não muito prático, é "adivinhar" o valor de n e verificar os resultados locando T contra m^n num papel milimetrado comum; caso a adivinhação tenha sido correta, o gráfico será de uma linha reta. Outro método, mais prático, é locar T contra m num papel log-log; caso os pontos se alinhem numa reta, o coeficiente angular da reta será a constante n. Um terceiro método, caso não se tenha papel log-log, é fazer o gráfico, em papel milimetrado, de log T contra log m; o coeficiente angular da reta será, novamente, a constante n.) *(b)* Quais os pontos que se afastam mais fortemente do gráfico retilíneo de T contra m^n?

2. A tabela seguinte dá o período T e o raio da órbita r de quatro satélites que giram em torno de um asteróide pesado.

Período, T anos	0,44	1,61	3,88	7,89
Raio, r 10^5 km	0,88	2,08	3,74	6,00

(a) Estes dados podem ser satisfeitos por uma fórmula do tipo $T = Cr^n$. Determinar C e n. *(b)* O período de um quinto satélite, descoberto posteriormente, é 6,20 anos. Qual o raio da órbita deste satélite que satisfaz à mesma fórmula?

3. O período de um pêndulo simples T depende do comprimento L do pêndulo e da aceleração da gravidade g (dimensões L/T^2). *(a)* Determinar uma combinação simples de L e g que tenha as dimensões de tempo. *(b)* Verificar a dependência entre T e L medindo o período (intervalo de tempo necessário para uma oscilação completa, ida e volta) de um pêndulo com dois comprimentos distintos. *(c)* A fórmula correta que relaciona T a L e g envolve uma constante que é um múltiplo de π e não pode ser obtida na análise dimensional da parte *(a)*. Ela pode ser determinada, experimentalmente, como em *(b)*, no caso de g ser conhecida. Utilizando o valor de g = 9,8 m/s², e os resultados experimentais da parte *(b)*, determine a fórmula completa que relaciona T a L e g.

4. Um projétil é lançado com um ângulo inicial de 45° e cobre uma distância R, chamada alcance, a qual só depende da velocidade inicial v e da aceleração da gravidade g (dimensões L/T^2). Utilizando a análise dimensional, determinar a dependência de R em relação à velocidade e a g.

5. Uma bola é lançada horizontalmente de uma altura H com uma velocidade v e cobre uma distância horizontal R. *(a)* Você espera que R cresça ou decresça com o aumento de H? E com o aumento de v? *(b)* A partir da análise dimensional, determine uma relação possível entre R, H, v e g.

6. Mostre que sen 2θ = 2 sen θ · cos θ. *Sugestão:* utilize a Equação 1.12.

7. A partir da Equação 1.12 e da identidade tan θ = (sen θ)/(cos θ), determinar a expressão de tan $(\theta_1 + \theta_2)$ em termos de tan θ_1 e tan θ_2.

8. Um homem começa a andar na interseção de uma estrada norte-sul com uma leste-oeste, e caminha 10 km na direção nordeste, seguindo uma linha que faz um ângulo de 30° com a direção leste. *(a)* Qual a sua distância da estrada norte-sul? E da leste-oeste? *(b)* Depois desta caminhada, ele muda de direção e passa a andar numa direção perpendicular à primeira, até chegar à estrada norte-sul. Quanto ele tem que caminhar?

9. Em cada caso do Exercício 25, calcule o termo abandonado, $(1/2)n(n-1)x^2$, na expansão do binômio e exprima este termo como uma fração percentual da resposta encontrada no exercício. *(b)* Determine a diferença entre a resposta aproximada, em cada um dos exercícios, e o cálculo exato (mediante tábuas ou métodos exatos de cálculo), e exprima a diferença como fração percentual da resposta exata.

10. Repita o Problema 9 usando os dados do Exercício 26.

2

Movimento em uma Dimensão

Para simplificar a discussão do movimento, começaremos com corpos cuja posição pode ser descrita pela localização de um único ponto. Um destes corpos é denominado uma *partícula*, ou ponto material. Há a tendência em pensar que a partícula é um corpo muito pequeno, um grãozinho de chumbo, por exemplo. Na verdade, não há qualquer limite de tamanho implícito no conceito. Caso não estejamos interessados na extensão do corpo ou no seu movimento de rotação, qualquer objeto pode ser considerado uma partícula. Por exemplo, às vezes é conveniente considerar a Terra como uma partícula movendo-se em torno do Sol numa trajetória quase circular. Neste caso, estamos interessados somente no movimento do centro da Terra, e estamos ignorando o seu tamanho e a sua rotação. Em alguns problemas astronômicos, o sistêma solar, e até mesmo uma galáxia inteira, é tratado como partícula.

Tamanho e estrutura não são importantes para uma partícula

Havendo interesse no movimento interno ou na estrutura interna do corpo, não é mais possível tratá-lo como partícula. O nosso estudo de movimento de partículas é, no entanto, útil mesmo nestes casos, pois qualquer objeto complexo pode ser tratado como um sistema de partículas. Até mesmo um corpo tão diminuto como o núcleo atômico, com o diâmetro de cerca de 10^{-15}m (1 fm), é um complicado sistema de partículas quando a sua estrutura é examinada em detalhe. Concentraremos o nosso estudo, no decorrer dos nove primeiros capítulos deste livro, no movimento de uma única partícula (ocasionalmente, de duas partículas), ao mesmo tempo em que desenvolveremos conceitos e métodos importantes da mecânica clássica. No Capítulo 10 estenderemos a discussão a sistemas de partículas.

O movimento mais simples é unidimensional

Para descrever o movimento duma partícula precisamos dos conceitos de *deslocamento*, *velocidade* e *aceleração*. No movimento geral de uma partícula num espaço de três dimensões, estas grandezas são vetores que têm direção e tamanho. Estudaremos os vetores e o movimento geral dum ponto material no Capítulo 3; agora, limitamos a discussão ao movimento ao longo de uma linha reta, isto é, ao movimento a uma dimensão. Neste movimento só existem duas direções possíveis. Distinguem-se pela designação de uma ser positiva e a outra negativa. Um exemplo simples de movimento unidimensional é o de um carro movendo-se ao longo de uma estrada plana, reta e estreita. Podemos escolher qualquer ponto conveniente do carro para localizar esta "partícula". Já que no momento estamos interessados no movimento unidimensional, podemos desprezar a largura da estrada e considerá-la uma linha geométrica.

Perguntas

1. Dê diversos exemplos de movimento de corpos grandes em que a admissão de serem partículas é uma aproximação adequada. Dê outros exemplos em que a aproximação é imprópria.
2. Em muitos aspectos, o movimento de um corpo ao longo de uma linha curva é análogo ao movimento em linha reta. Você pode dar motivos que justifiquem o tratamento separado desses dois casos?

2.1 Deslocamento e velocidade média

Vamos estabelecer um sistema de coordenadas escolhendo um ponto de referência sobre a linha como a origem O. Todo outro ponto da linha será associado a um número x que indica a distância do ponto à origem (abscissa). O valor de x depende da unidade escolhida para medir a distância. O sinal de x depende da sua posição relativa à origem O; é positivo, quando x está à direita, e negativo, no caso de x estar à esquerda.

Admita que a nossa partícula está na posição x_1 no instante t_1 e no ponto x_2 no instante t_2. Imaginemos que a posição seja determinada em vários outros instantes de tempo ao longo da trajetória. A Figura 2.1 mostra o gráfico da função $x(t)$. Os pontos determinados diretamente foram ligados por uma curva suave. Esta curva representará o movimento da partícula, em maior ou menor grau, de acordo com o número de pontos determinados e com a complexidade do movimento. A modificação da posição da partícula, $x_2 - x_1$, é denominada o *deslocamento* da partícula. É comum utilizar a letra grega Δ (delta maiúsculo) para indicar modificação numa grandeza. Assim, a modificação de x é escrita como Δx. A notação Δx (leia "delta x") indica uma única grandeza; a modificação de x não é o produto de Δ por x, da mesma forma que cos x não é o produto de cos por x:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad 2.1$$

Definição de deslocamento

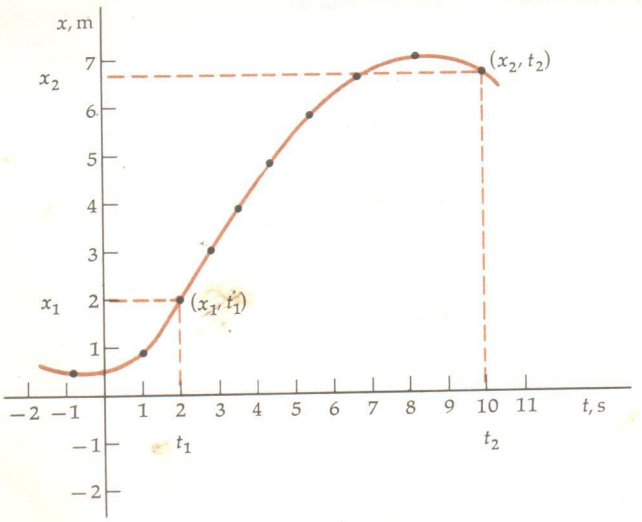


Fig. 2.1 Gráfico de x contra t, do movimento de uma partícula, em uma dimensão. Os pontos observados experimentalmente foram ligados por uma curva suave.

A velocidade média da partícula é definida como o quociente do deslocamento Δx pelo intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad 2.2$$

Definição de velocidade média

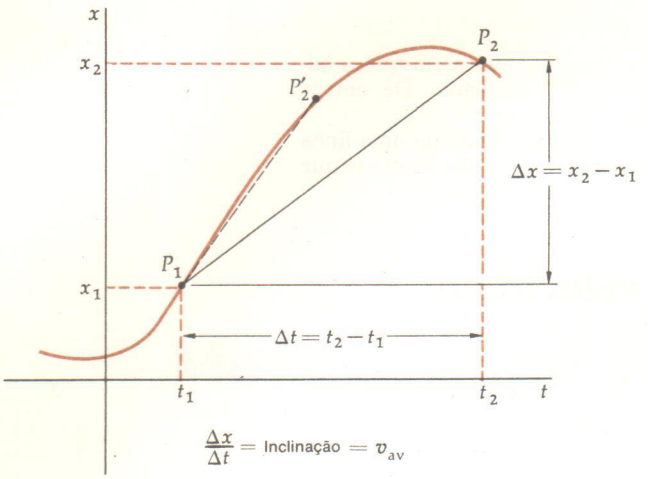


Fig. 2.2 Gráfico de x contra t, do movimento unidimensional de uma partícula, análogo ao da Figura 2.1. Traçou-se uma linha reta da posição P_1 até P_2. A velocidade média no intervalo de tempo $t_2 - t_1$ é definida como a inclinação desta reta, $v_m = \Delta x/\Delta t$. A velocidade média depende do intervalo de tempo, o que é verificado pelo fato de a linha de P_1 até P'_2 ter inclinação maior que a de P_1 a P_2.

Observe que não só o deslocamento, mas também a velocidade média, podem ser positivos ou negativos, de acordo com o fato de ser x_2 maior ou menor que x_1 (admitindo ser Δt positivo). Quando qualquer das grandezas é positiva, o movimento se dá para a direita, os valores negativos indicando movimentos para a esquerda.

Na Figura 2.2 aparece uma linha reta traçada do ponto (x_1,t_1) até o ponto (x_2,t_2). Esta linha é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são Δt e Δx. A razão $\Delta x/\Delta t$ é denominada *coeficiente angular* da reta. Geometricamente, é uma medida da inclinação da linha reta em relação à horizontal. Sendo dado um intervalo de tempo Δt, a linha será tão mais inclinada quanto maior for o valor de $\Delta x/\Delta t$. Uma vez que esta razão é, por definição, a velocidade média no intervalo Δt, temos uma interpretação geométrica desta grandeza: ela é o coeficiente angular do segmento de reta que liga os pontos (x_1,t_1) e (x_2,t_2). Em geral, a velocidade média depende do intervalo de tempo. Na Figura 2.2, por exemplo, caso o intervalo de tempo fosse menor, com o instante t'_2 mais próximo de t_1, a velocidade média seria maior, conforme se vê pela maior inclinação da reta que liga os pontos P_1 e P'_2.

Coeficiente angular: medida de inclinação

Exemplo 2.1. Sendo $x_1 = 18$ m e $t_1 = 2$ s; e $x_2 = 3$ m e $t_2 = 7$ s, determinar o deslocamento e a velocidade média, neste intervalo de tempo.

Por definição, o deslocamento é,

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3 \text{ m} - 18 \text{ m} = -15 \text{ m}$$

e a velocidade média é:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{3 \text{ m} - 18 \text{ m}}{7 \text{ s} - 2 \text{ s}} = \frac{-15 \text{ m}}{5 \text{ s}} = -3 \text{ m/s}.$$

O deslocamento e a velocidade média são negativos, o que indica movimento da partícula para a esquerda, no sentido dos valores decrescentes de x.

Observe que a unidade metro por segundo é parte da resposta para a velocidade média encontrada no Exemplo 2.1. Em virtude da existência de muitas outras escolhas possíveis para a unidade de comprimento (centímetro, quilômetro, ano-luz etc.) e para a unidade de tempo (hora, minuto, ano), é essencial incluir a unidade com o valor numérico da resposta. Afirmar que "a velocidade média da partícula é -3" não tem sentido.

Exemplo 2.2. Que distância percorre um carro em 5 min à velocidade média de 60 km/h?

Neste exemplo estamos interessados em um deslocamento durante um intervalo de tempo de 5 min. Da Equação 2.2, o deslocamento é expresso por:

$$\Delta x = v_m \Delta t.$$

Então:

$$\Delta x = 60 \text{ km/h} \times 5 \text{ min} = 300 \frac{\text{km-}\cancel{\text{min}}}{\cancel{\text{h}}} \frac{1 \cancel{\text{h}}}{60 \cancel{\text{min}}} = 5 \text{ km}$$

O fator de conversão 1 h/60 min transforma a unidade de deslocamento km.min/h em km.

Perguntas

3. Qual o sentido, se é que tem, da proposição: "A velocidade média do carro, às 9 horas, era de 90 km/h"?
4. É possível que a velocidade média, num dado intervalo de tempo, seja zero, apesar de a velocidade média num intervalo de tempo menor, incluído no primeiro, não ser nula? Explique.

2.2 Velocidade instantânea

À primeira vista, parece impossível definir a velocidade de uma partícula num determinado instante, isto é, num dado tempo. Num instante t_1, a partícula está num único ponto, x_1; e se está neste ponto, como pode estar movendo-se? Por outro lado, se não está se movendo, não deveria permanecer indefinidamente no mesmo ponto? É este um velhíssimo paradoxo que pode ser resolvido quando se observa que para analisar o movimento, e defini-lo, é preciso verificar a posição do corpo em mais de um instante. É possível, então, definir a velocidade num instante, mediante um processo de passagem ao limite.

Velocidade num ponto

A Figura 2.3 é a mesma curva de x contra t da Figura 2.2, mostrando uma seqüência de intervalos de tempo, Δt_1, Δt_2, Δt_3, . . . , cada qual menor que o seu antecedente. Em cada intervalo Δt, a velocidade média é representada pela inclinação da reta pontilhada pertinente ao intervalo. A figura mostra que enquanto os intervalos de tempo diminuem, as retas tornam-se mais inclinadas, mas não mais inclinadas que a tangente à curva no ponto correspondente a t_1. Definimos a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente à curva, no instante t_1, como a *velocidade instantânea*. Ela é o limite do quociente $\Delta x/\Delta t$ quando Δt se aproxima de zero:

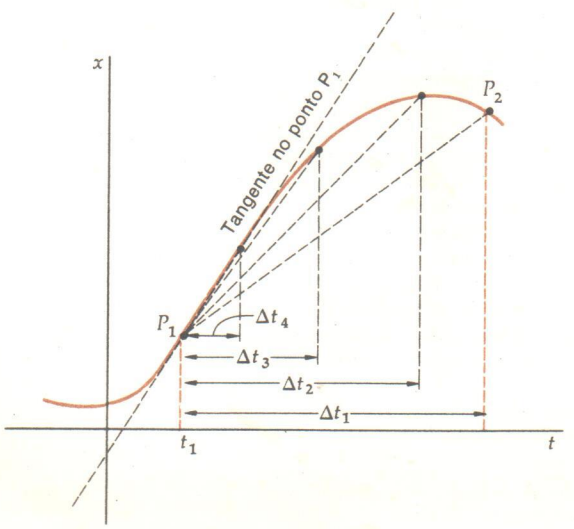
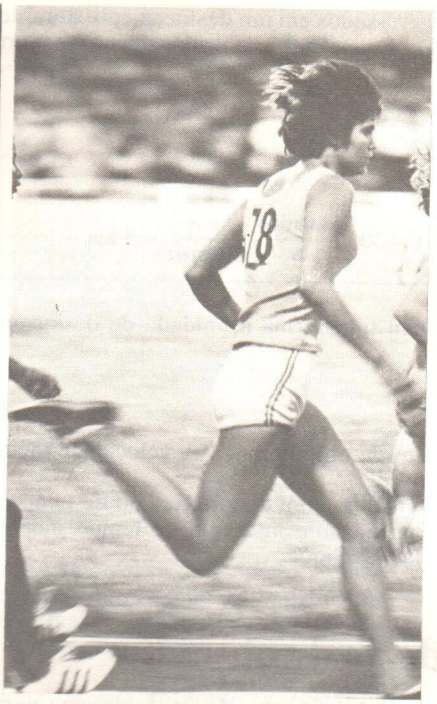


Fig. 2.3 Gráfico da $x(t)$, a partir das Figuras 2.1 e 2.2. À medida que o intervalo de tempo que começa em t_1 é diminuído, a velocidade média neste intervalo se aproxima da inclinação da tangente à curva no ponto P_1. A velocidade instantânea no instante t_1 é definida como a inclinação da tangente neste ponto.

A. J. Wyatt



Ken Regan/Camera 5

Movimento, representado por um artista, no quadro "Nu descendo uma escada", de Duchamp *(Marcel Duchamp, n.º 2, 1912, Louise and Walter Arensberg Collection, Philadelphia Museum of Art.)* Que detalhes, na fotografia da corredora, sugerem o movimento? Podemos dizer, a partir de uma simples fotografia instantânea, se o atleta está em movimento?

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{coeficiente angular da tangente à curva } x(t). \qquad 2.3$$

Definição de velocidade instantânea

Este limite é a *derivada de x em relação a t*, no ponto t_1. Na notação do cálculo diferencial[1], a derivada é escrita como dx/dt:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad 2.4$$

Definição de derivada

É importante perceber que o deslocamento Δx depende do intervalo de tempo Δt. Quando Δt se aproxima de zero, Δx também se aproxima (v. Fig. 2.3), e a razão $\Delta x/\Delta t$ se aproxima do coeficiente angular da tangente à curva. Para calcular este limite, não se faz Δt igual a zero, pois então Δx seria também igual a zero, e a razão $\Delta x/\Delta t$ não seria definida.

O conceito de limite de uma função só pode ser compreendido com um estudo cuidadoso. Omitimo-lo aqui, aceitando a hipótese de ter sido feito no curso de cálculo.

Exemplo 2.3 A posição de uma partícula é dada pela função representada na Figura 2.4. Determinar a velocidade instantânea no tempo $t = 2$ s. Quando a velocidade é maior? Quando é nula? Pode ser negativa?

Na figura, desenhamos a tangente à curva no instante $t = 2$ s. O coeficiente angular desta reta, medido no gráfico, é (3 m/2 s) = 1,5 m/s. Então, $v = 1{,}5$ m/s, no instante $t = 2$ s. De acordo com a figura, a inclinação da tangente é máxima nas vizinhanças de $t = 4$ s. A velocidade é zero nos instantes $t = 0$ s e $t = 6$ s, pois nestes pontos as tangentes à curva são horizontais e têm inclinação nula. Depois de $t = 6$ s, a curva tem inclina-

[1]Estritamente, a notação dx/dt representa uma única grandeza, a derivada de x em relação a t, que é a inclinação da tangente à curva $x(t)$. Adiante, definiremos as grandezas dx e dt (chamadas *diferenciais*), e a razão delas será esta inclinação. Quando Δx e Δt são muito pequenos, a razão $\Delta x/\Delta t$ é *quase* igual ao coeficiente angular da tangente. Por isso, é prático, embora não matematicamente rigoroso, pensar em dt como um pequenino intervalo de tempo e em dx como uma pequenina variação na coordenada x.

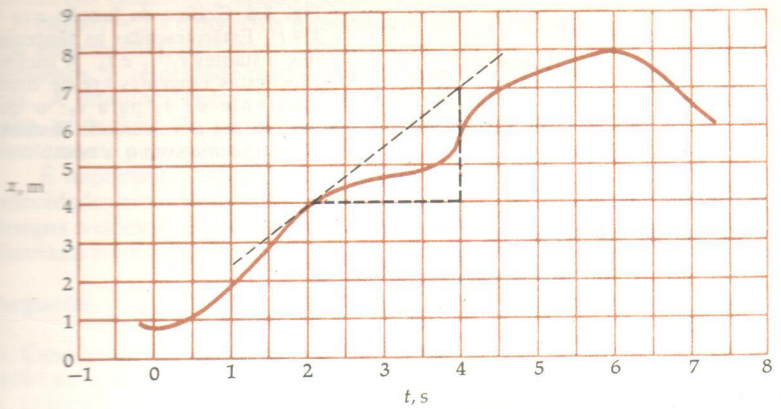


Fig. 2.4 Gráfico de x contra t, do Exemplo 2.3. A velocidade instantânea em $t = 2$ s pode ser determinada pela medida da inclinação da tangente à curva, neste ponto.

ção negativa, o que indica ser a velocidade negativa. (O coeficiente angular da reta tangente à curva é freqüentemente denominado, de maneira compacta, a *inclinação da curva*.)

Exemplo 2.4 Uma partícula está no ponto $x = 5$ m, quando $t = 0$ s, e se move com uma velocidade constante de 10 m/s. Represente graficamente a sua posição x em função do tempo.

Quando a velocidade é constante, o coeficiente angular da tangente à curva de x contra t também o é. Ora, a curva que tem coeficiente angular constante é a linha reta. A expressão geral da equação da linha reta é

$$x = mt + b$$

onde m é o coeficiente angular e b é o valor de x quando $t = 0$, chamado *ordenada à origem*. Portanto, $m = 10$ m/s e $b = 5$ m, e a equação da curva é

$$x = 5 \text{ m} + (10 \text{ m/s})t.$$

É a curva desenhada na Figura 2.5. Em geral, se a partícula está na posição x_0 no instante $t = 0$, e tem a velocidade constante v, a sua posição é dada por

$$x = x_0 + vt$$

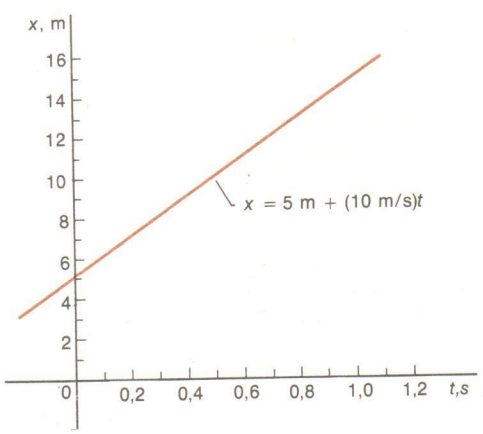


Fig. 2.5 Gráfico da função posição $x = 5$ m + (10 m/s) t, do Exemplo 2.4.

Exemplo 2.5 A posição de uma pedra que cai, a partir do repouso, do alto de um rochedo, é dada por $x = 4{,}9t^2$, onde x está em metros, medidos de cima para baixo a partir da posição inicial, e t está em segundos. Achar a velocidade em qualquer instante.

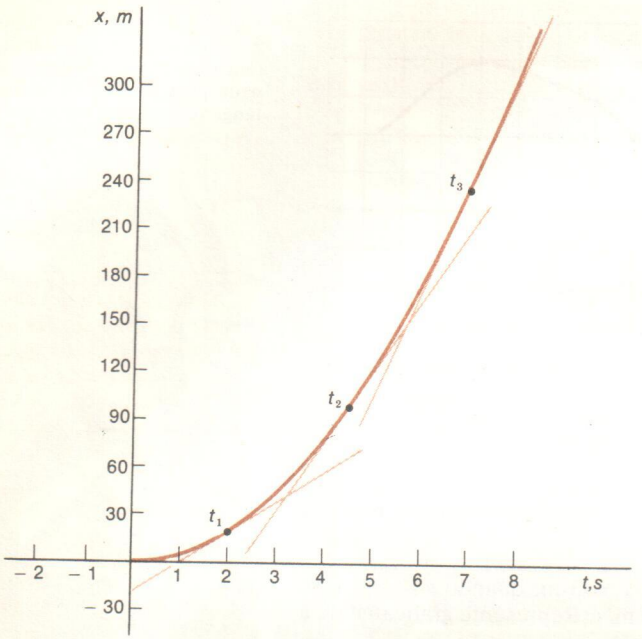


Fig. 2.6 Gráfico da função $x(t) = 4{,}9\ t^2$. Estão traçadas as tangentes nos instantes t_1, t_2 e t_3. A inclinação destas tangentes cresce continuamente de t_1 para t_3, o que mostra ser a velocidade instantânea crescente com o tempo.

Para simplificar a notação, omitimos a indicação explícita das unidades nas considerações seguintes.

Esta função está desenhada na Figura 2.6, onde estão também desenhadas três tangentes em três instantes diferentes, t_1, t_2 e t_3. As inclinações destas três retas são diferentes. À medida que o tempo passa, a inclinação da curva aumenta, o que mostra ser a velocidade instantânea crescente com o tempo. Podemos calcular a velocidade em qualquer instante t_1 pelo cálculo da derivada dx/dt a partir da definição da Equação 2.3. No instante t_1 a posição é

$$x_1 = 4{,}9t_1^2.$$

Num instante posterior, $t_2 = t_1 + \Delta t$, a posição é x_2, dada por:

$$x_2 = 4{,}9t_2^2 = 4{,}9(t_1 + \Delta t)^2 =$$
$$= 4{,}9\ [t^2, + 2t, \Delta t + (\Delta t)^2] =$$
$$= 4{,}9t_1^2 + 9{,}8t_1\ \Delta t + 4{,}9\ (\Delta t)^2.$$

Então, o deslocamento neste intervalo é

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 9{,}8t_1\Delta t + 4{,}9\ (\Delta t)^2$$

A velocidade média no intervalo de tempo é

$$v_m = \Delta x/\Delta t = 9{,}8\ t_1 + 4{,}9\ \Delta t$$

À medida que se consideram intervalos de tempo cada vez menores, Δt se aproxima de zero e o segundo termo $4{,}9\Delta t$ também se aproxima de zero, enquanto o primeiro fica inalterado. A velocidade instantânea no instante t_1 é, portanto,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 9{,}8\ t_1.$$

Esta função, a velocidade instantânea, é proporcional ao tempo. Em qualquer instante t, a velocidade instantânea é $v(t) = 9{,}8\ t$.

É instrutivo examinar numericamente o processo de passagem ao limite, calculando a velocidade média em intervalos de tempo cada vez me-

nores. No Quadro 2.1 estão calculadas as velocidades médias, no Exemplo 2.5, para $t_1 = 2$ s e diversos intervalos de tempo Δt, cada qual menor que o seu antecedente. O Quadro mostra que com intervalos de tempo muito pequenos, a velocidade média é quase igual à velocidade instantânea, 19,6 m/s. A diferença entre $\Delta x/\Delta t$ e o limite de $\Delta x/\Delta t$, quando Δt tende para zero, pode ficar tão pequena quanto se queira, escolhendo-se um Δt suficientemente pequeno.

Definição de velocidade escalar

É importante distinguir cuidadosamente entre a velocidade média e a velocidade instantânea. Habitualmente, no entanto, o termo velocidade designa velocidade instantânea. A grandeza da velocidade instantânea é chamada a *velocidade escalar*, ou, simplesmente, velocidade.

Perguntas

5. Caso as velocidades instantâneas não mudem de instante para instante, serão as velocidades médias diferentes em diferentes intervalos de tempo?
6. Quando $v_m = 0$ num dado intervalo de tempo Δt, a velocidade instantânea deve ser zero num certo instante dentro deste intervalo? Justifique a sua resposta mediante o gráfico de uma curva de x contra t em que $\Delta x = 0$ num intervalo Δt.

Quadro 2.1 Deslocamento e velocidade média, em diversos intervalos de tempo Δt, começando em t = 2 s, para a função x = 4,9t²

Δt, *s*	Δx, *m*	Δx/Δt, *m/s*
1,00	20,60	20,60
0,50	10,05	20,10
0,20	3,960	19,80
0,10	1,970	19,70
0,05	0,980	19,65
0,01	0,1961	19,61
0,005	0,0980	19,605
0,001	0,0196	19,6001
0,0001	0,00196	19,60001

2.3 Aceleração

Quando a velocidade instantânea da partícula modifica-se com o tempo, como no Exemplo 2.5, a partícula está *acelerada*. A aceleração média no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é definida como a razão $\Delta v/\Delta t$, onde $\Delta v = v_2 - v_1$ é a modificação da velocidade instantânea no intervalo de tempo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad 2.5$$

Definição de aceleração média

As dimensões da aceleração são comprimento dividido por tempo ao quadrado. Unidade conveniente para a sua medida é o metro por segundo por segundo, ou metro por segundo quadrado (m/s²), ou o centímetro por segundo quadrado (cm/s²). A aceleração de automóveis é comumente expressa em quilômetros por hora por segundo (km/h.s). A *aceleração instantânea* é o limite da razão $\Delta v/\Delta t$ quando Δt se aproxima de zero. Na curva que dá a velocidade contra o tempo, a aceleração instantânea é o coeficiente angular da tangente à curva em cada ponto:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{inclinação da curva de } v \text{ contra } t \qquad 2.6$$

Definição de aceleração instantânea

Portanto, a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Na notação do cálculo diferencial, escreve-se dv/dt. Uma vez que a velocidade também é uma derivada da posição x em relação ao tempo t, a aceleração é a *derivada segunda* de x em relação a t. A notação usual para esta derivada segunda é d^2x/dt^2. Podemos ver a origem desta notação escrevendo a aceleração como dv/dt e substituindo v por dx/dt:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad 2.7$$

Notação da derivada segunda

Quando a velocidade é constante, como no Exemplo 2.4, a aceleração é zero, pois $\Delta v = 0$ em qualquer intervalo de tempo. Neste caso, a inclinação da curva de x contra t não se modifica. No Exemplo 2.5, encontramos a função dando a posição $x = (4{,}9\ \text{m/s}^2)t^2$, a velocidade cresce linearmente com o tempo de acordo com a função $v = (9{,}8\ \text{m/s}^2)t$. Neste caso, a aceleração é constante e igual a 9,8 m/s², sendo a inclinação constante da curva de v contra t. Pode-se ter uma idéia, pelo menos qualitativa, da aceleração a partir da curva de x contra t. Da Figura 2.6, por exemplo, podemos ver

que a velocidade está crescendo com o tempo pelo aumento da inclinação das retas tangentes — por isso, a curva mostra ser a aceleração positiva.

Exemplo 2.6 A partir da curva da Figura 2.7, discutir qualitativamente a velocidade e a aceleração no ponto $t = 5$ s.

Em $t = 5$ s, a tangente à curva é horizontal, com inclinação nula. O fato de a velocidade ser nula *não* implica a nulidade da aceleração. Esta é a taxa de modificação da velocidade instantânea. Para achar a aceleração num dado instante, devemos saber como a velocidade está se modificando com o tempo. Neste exemplo, para achar a aceleração no tempo $t = 5$ s, precisamos conhecer a velocidade em outros instantes, nas vizinhanças de $t = 5$ s. Da figura, percebe nos que a inclinação da curva é positiva pouco antes de $t = 5$ s e negativa pouco depois. Então, a velocidade passa de um valor positivo para zero e para um valor negativo, a aceleração sendo negativa. Na Figura 2.8, fizemos a curva da velocidade contra o tempo, correspondente à função da curva dada na Figura 2.7. Observe que em $t = 5$ s, a velocidade é nula; apesar disto, a inclinação da curva de v contra t não é zero, mas negativa.

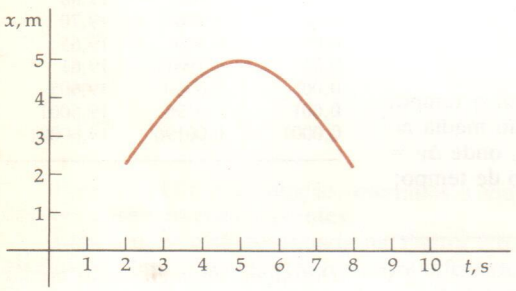


Fig. 2.7 Gráfico da curva de x contra t do Exemplo 2.6. A inclinação da tangente em $t = 5$ s é zero, indicando ser nula a velocidade instantânea neste instante. Pouco antes de $t = 5$ s, a inclinação é positiva; pouco depois, é negativa. Uma vez que a inclinação está diminuindo em $t = 5$ s, a aceleração é, neste tempo, negativa.

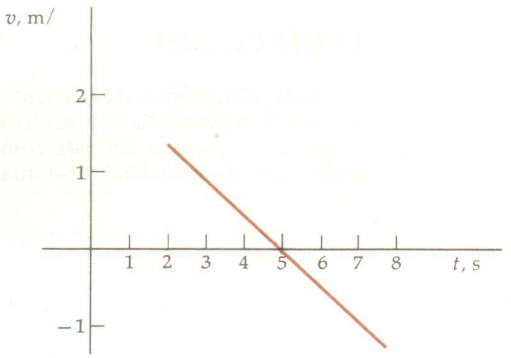


Fig. 2.8 Curva da velocidade contra o tempo, correspondente à curva da posição da Figura 2.7. Em $t = 5$ s, a velocidade é nula e decrescente.

Exemplo 2.7 A posição de uma partícula é dada por $x = Ct^3$, onde C é uma constante com as dimensões de m/s^3. Determinar a velocidade e a aceleração em função do tempo.

O gráfico de x contra t (que não desenhamos) é parecido com o do Exemplo 2.5, com x crescendo mais rapidamente com o tempo. A inclinação da curva aumenta com o tempo, indicando ser a velocidade crescente. Da mesma maneira que naquele exemplo, podemos calcular a velocidade mediante a derivada dx/dt, que se encontra através da definição da Equação 2.3. Num instante t_1 a posição é $x_1 = Ct_1^3$. Num instante posterior $t_2 = t_1 + \Delta t$, a posição é

$$x_2 = Ct_2^3 = C(t_1 + \Delta t)^3 = Ct_1^3 + 3Ct_1^2\,\Delta t + 3Ct(\Delta t)^2 + C(\Delta t)^3$$

O deslocamento, portanto, é

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 3Ct_1^2\,\Delta t + 3Ct_1(\Delta t)^2 + C(\Delta t)^3$$

A velocidade média, neste intervalo de tempo, é

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 3Ct_1^2 + 3Ct\,\Delta t + C(\Delta t)^2$$

Quando $\Delta t \to 0$, as duas últimas parcelas da direita também se aproximam de zero e a parcela $3Ct_1^2$ permanece invariável. A velocidade instantânea no instante t é, portanto,

$$v = 3Ct^2$$

Veja que calculando a velocidade no instante t_1 pode-se eliminar o índice 1 do tempo e escrever a velocidade para um instante t qualquer.

Calcula-se a aceleração pela repetição do processo e encontrando a derivada de v em relação a t, que é a derivada segunda de x em relação a t. Omitimos a manipulação algébrica desta dedução, pois é semelhante à que vimos acima e no Exemplo 2.5. A modificação de velocidade no intervalo de tempo de t até $t + \Delta t$ é

$$\Delta v = 3C(t + \Delta t)^2 - 3Ct^2 = 6Ct\,\Delta t + 3C(\Delta t)^2$$

Dividindo esta expressão por Δt, para obter a aceleração média neste intervalo, vem:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 6Ct + 3C\,\Delta t$$

A aceleração instantânea é:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = 6Ct$$

Neste exemplo, a aceleração não é constante, mas cresce com o tempo.

Nos exemplos até agora vistos, as derivadas foram calculadas diretamente, a partir da definição, fazendo a apropriada passagem ao limite. É útil examinar as diversas propriedades das derivadas, bem como desenvolver regras que permitam o seu cálculo para quaisquer funções, com rapidez e sem fazer apelo, em cada caso, à definição inicial. No Quadro E.1, no Apêndice E, aparece uma lista destas regras, acompanhada de rápida discussão sobre a respectiva origem. Utilizaremos estas regras sem comentários, deixando o estudo detalhado para o curso de cálculo.

A Regra 7, do Quadro E.1, é tão utilizada que a repetimos aqui. Quando x é uma potência simples de t, como

$$x = Ct^n$$

onde C e n são constantes quaisquer, a derivada de x em relação a t é dada por

$$\frac{dx}{dt} = Cnt^{n-1}$$

Já vimos, nos exemplos anteriores, aplicações desta regra para $n = 1$, 2 e 3, como ilustra o Exemplo 2.7, $x = Ct^3$, e encontramos $v = dx/dt = 3Ct^2$ e $a = dv/dt = 6Ct$.

Perguntas

7. Dê um exemplo de movimento em que a velocidade seja negativa, mas a aceleração positiva. Faça um gráfico de v contra t.

8. Dê um exemplo de movimento em que a aceleração e a velocidade sejam negativas.

9. É possível um corpo ter velocidade nula e aceleração diferente de zero?

2.4 Determinação de $x\ (t)$ a partir de $v(t)$: o problema da condição inicial

Vimos como deduzir a velocidade e a aceleração a partir da posição em função do tempo, mediante derivações. O problema inverso é o de determinar a função posição $x(t)$, dada a velocidade v ou a aceleração a. Para resolver este problema — encontrar uma função que tem uma derivada conhecida — utilizamos as derivadas dos diversos tipos de função e que estão relacionadas no Quadro E.1 do Apêndice. Consideremos, por exemplo, a função velocidade constante, $v = v_0$. No Exemplo 2.4, já encontramos a função posição x que corresponde a este tipo de velocidade. Utilizamos o nosso conhecimento de ser retilínea a curva de x contra t com inclinação constante. Então, x deve variar linearmente com t; uma função deste tipo é

Achando a posição pela derivada

$$x = v_0 t$$

Esta, porém, não é solução geral do problema.

Podemos adicionar uma constante qualquer ao segundo membro desta equação sem modificar a derivada, pois a derivada de uma constante é igual a zero. Chamando esta constante de x_0, a função mais geral que dá a posição da partícula com velocidade constante v_0 é:

$$x = x_0 + v_0 t$$

A constante x_0 é a posição no instante $t = 0$, conforme se vê substituindo t por zero na equação.

Consideremos um problema ligeiramente mais difícil, o de uma partícula cuja velocidade é proporcional ao tempo:

$$v = a_0 t$$

A constante de proporcionalidade, a_0, é precisamente a aceleração, conforme se pode ver pelo cálculo de $dv/dt = a_0$. Pergunta-se: que função $x(t)$ tem a derivada $a_0 t$? Observamos pela Regra 7 do Quadro E.1 que a derivada de t^n é nt^{n-1}. A função $x(t)$ procurada deve, então, ser proporcional a t^2, e podemos verificar que a função correta é $(1/2)a_0 t^2$. Novamente podemos adicionar qualquer constante a esta função sem modificar a sua derivada. A resposta geral para a função que tem a derivada $a_0 t$ é onde a constante aditiva x_0 é o valor de x quando $t = 0$. Caso o valor de x seja dado num instante qualquer, podemos calcular o valor de x_0.

$$x = x_0 + \tfrac{1}{2} a_0 t^2$$

O cálculo de uma função a partir da sua derivada é denominado antiderivação ou mais apropriadamente, integração indefinida (ver adiante). A função determinada é a *antiderivada* (integral indefinida) da função. Ela sempre tem uma constante aditiva, relacionada com a escolha da origem. Caso a derivada da função seja dada num intervalo, e o valor da função conhecido num ponto deste intervalo, a função está univocamente determinada neste intervalo, pois o valor da constante aditiva pode ser encontrado mediante a informação que está sendo dada.

Antiderivada

Vejamos um exemplo em que a aceleração é dada.

Exemplo 2.8 A aceleração de uma partícula é constante, $a(t) = a_0$. Determinar a função posição $x(t)$ da partícula.

Devemos, em primeiro lugar, encontrar a velocidade $v(t)$ e utilizá-la para calcular $x(t)$. Fazemos, então, duas vezes o cálculo da antiderivada; em cada vez, introduzimos uma constante aditiva. Conseqüentemente, existirão duas constantes na função $x(t)$ que ainda não estão determinadas. Estas constantes são em geral determinadas pelo conhecimento da velocidade num certo instante, e da posição num outro ou no mesmo instante.

Temos, então, a derivada $dv/dt = a_0$. Resolvemos este problema ante-

riormente, no exemplo inicial desta seção. A função geral que tem derivada constante é $v(t) = a_0t + v_0$. A constante aditiva v_0 é o valor de $v(t)$ quando $t = 0$. Agora precisamos da função $x(t)$ que tem a derivada $dx/dt = a_0t + v_0$. De acordo com a Regra 2 do Quadro E.1 (a derivada da soma de várias parcelas é igual à soma das derivadas das parcelas), podemos tratar cada termo separadamente. A função $(1/2)a_0t^2$ tem a derivada a_0t, e a função v_0t tem a derivada v_0. A constante aditiva das duas antiderivadas pode ser combinada numa só constante; chamando-a de x_0, a solução completa é

$$x(t) = x_0 + v_0t + \tfrac{1}{2}a_0t^2$$

Achando a posição pela aceleração

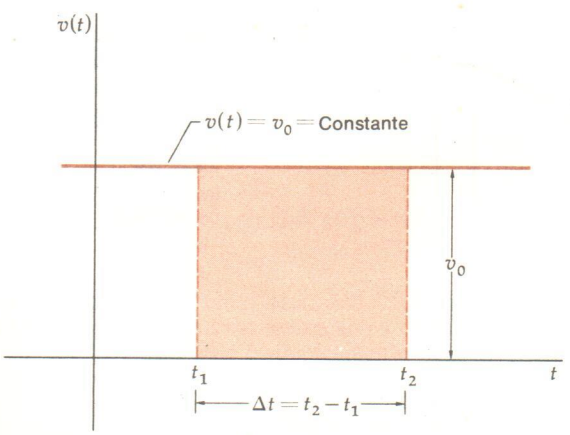
No exemplo anterior, vimos que, quando $x(t)$ é determinado a partir da aceleração $a(t)$, aparecem duas constantes. Foi possível relacionar estas constantes à posição inicial, x_0, e à velocidade inicial, v_0. O problema "dada a aceleração $a(t)$ encontrar $x(t)$" é um problema dito de *condição inicial*. A sua solução depende da forma da função $a(t)$ e dos valores de v e x em instantes determinados; estes dois valores freqüentemente são iniciais, isto é, valores no instante $t = 0$. O problema é particularmente importante em física, pois a aceleração da partícula é determinada pelas forças que agem sobre ela. Então, se conhecemos as forças sobre a partícula, e a sua posição e velocidade num certo instante, podemos encontrar a sua posição, univocamente, em qualquer outro.

2.5 A antiderivada e a integração

O problema de encontrar a antiderivada está relacionado com o da *integração*, ou o de encontrar o tamanho da área subtendida por uma curva. Analisaremos, sucintamente, este problema fundamental do cálculo.

Imaginemos o caso de movimento com velocidade constante v_0. O deslocamento, num intervalo de tempo Δt, é o produto da velocidade pelo intervalo de tempo:

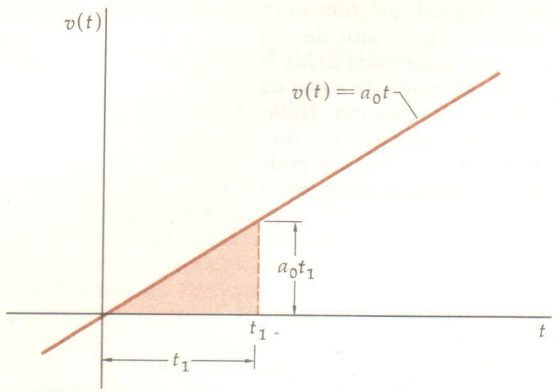
$$\Delta x = v_0\,\Delta t$$



Área sombreada $= v_0\,\Delta t = v_0(t_2 - t_1)$
$= v_0t_2 - v_0t_1 = x_2 - x_1 = \Delta x$

Fig. 2.9 O deslocamento no intervalo de tempo Δt é igual à área subtendida pela curva de v contra t. Quando $v(t) = v_0$ = constante, o deslocamento é medido pela área do retângulo sombreado.

Conforme se vê na Figura 2.9, este produto é medida da área subtendida pela curva de v contra t. A interpretação geométrica de ser o deslocamento medido pela área subtendida pela curva de v contra t é completamente



Área sombreada $= \frac{1}{2}$ (base) (altura) $= \frac{1}{2}(t_1)(a_0 t_1)$

$= \frac{1}{2} a_0 t_1^2 = x_1$

Fig. 2.10 Quando $v(t) = a_0 t$, o deslocamento durante o intervalo de $t = 0$ até $t = t_1$ é igual à área do triângulo sombreado. Uma vez que a base do triângulo é t_1 e a altura $a_0 t_1$, a área é $(1/2)a_0 t_1 \cdot t_1 = (1/2)a_0 t_1^2$.

geral. Na Figura 2.10 aparece a curva de v quando a velocidade é proporcional ao tempo, $v = a_0 t$. Na seção anterior, encontramos a posição sendo dada por $x = x_o + (1/2)a_o t^2$. O deslocamento, durante o intervalo de $t = 0$ até $t = t_1$ é

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \tfrac{1}{2} a_0 t_1^2$$

Conforme se vê na figura, novamente este valor é medida da área subtendida pela curva, neste intervalo.

Na Figura 2.11, aparece uma curva geral para v. Caso fosse conhecida a função $v(t)$ desta curva, poderíamos calcular sempre a antiderivada e determinar a função posição $x(t)$, exceto quanto ao valor inicial x_o, que deveria ser determinado mediante informação adicional, como por exemplo, o valor de x num dado instante. Podemos, portanto, encontrar o deslocamento em qualquer intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ fazendo a subtração $x(t_2) - x(t_1)$, o que dá Δx mesmo que x_o não seja conhecido, pois desaparece na diminuição.

No entanto, caso não seja conhecida a função $v(t)$, podemos obter o deslocamento Δx num intervalo $t_2 - t_1$ diretamente da curva de $v(t)$ contra t, mediante o cálculo da área compreendida pela curva, neste intervalo.

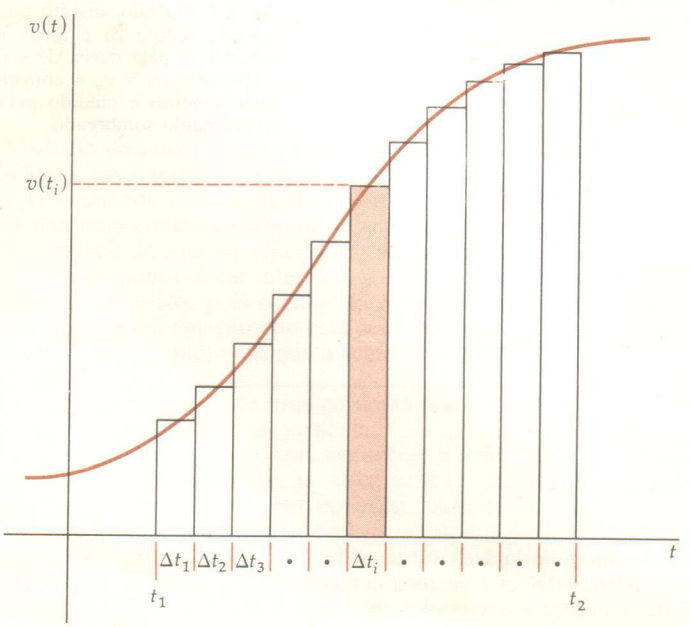


Fig. 2.11 Gráfico de uma curva $v(t)$ geral contra t. O deslocamento no intervalo Δt_i assemelha-se a $v(t_i)\Delta t_i$, e está indicado pela área sombreada. O deslocamento total, de t_1 a t_2, é a área sob a curva, neste intervalo, e pode ser calculada pela soma das áreas de todos os retângulos.

Na Figura 2.11, o intervalo $t_2 - t_1$ está dividido em vários intervalos pequenos Δt_i. No instante t_i, que é praticamente qualquer instante no intervalo Δt_1, a velocidade instantânea é

$$v(t_i) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$$

Quando Δt_i for muito pequeno, a velocidade instantânea é, aproximadamente, a velocidade média:

$$v(t_i) \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}$$

O deslocamento, durante o pequenino intervalo de tempo Δt_i é, portanto,

$$\Delta x_i \approx v(t_i)\, \Delta t_i$$

e esta aproximação será tão melhor quanto menor for Δt_i. A figura mostra que Δx_i é medido pela área do retângulo sombreado. Esta área é, aproximadamente, a área subtendida pela curva quando Δt_i é pequeno. O deslocamento total, de t_1 até t_2, é, portanto, a soma de todos os Δx_i:

$$\Delta x = \sum_{t_1}^{t_2} \Delta x_i \approx \sum_{t_1}^{t_2} v(t_i)\, \Delta t_i$$

onde o somatório começa no primeiro retângulo, em t_1, e termina no último, em t_2. O número de parcelas depende do número de subintervalos. À medida que os subintervalos ficam menores, o número de parcelas aumenta, e a soma dá uma aproximação melhor do tamanho da área compreendida pela curva e, portanto, do deslocamento Δx. Então,

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} v(t_i)\, \Delta t_i \qquad 2.8$$

= área sob a curva de $v(t)$, de t_1 a t_2

A integral definida é a área sob a curva

A Equação 2.8 é, na verdade, a definição da área compreendida pela curva. Podemos medir esta área de várias maneiras. Uma delas consiste em desenhar a curva em papel milimetrado; contar os quadradinhos que se lhe situam embaixo, estimar as frações das quadrículas cortadas por ela, e somar tudo, para ter o número total de quadrículas e, por conseguinte, a área. Outra maneira é recortar a curva num papel, juntamente com a área que subtende; pesar o recorte e comparar o peso com o de um retângulo de área conhecida, recortado do mesmo papel.

O limite da soma da Equação 2.8 é chamado *integral definida*, e se escreve

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} v(t_i)\, \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = x(t_2) - x(t_1) \qquad 2.9$$

(O símbolo de integral, $\int$, é um S alongado, indicando soma.) A Equação 2.9 é também útil para determinar a área sob a curva, quando se conhece a função. Uma vez que esta área é simplesmente $x(t_2) - x(t_1)$, onde $x(t)$ é a antiderivada, é necessário apenas calcular a antiderivada em t_1 e em t_2 e fazer a diferença. A antiderivada, conforme dissemos, é chamada a integral indefinida, e se escreve sem indicação dos limites no símbolo da integral:

$$x(t) = \int v(t)\, dt$$

Exemplo 2.9 Determinar a área sob a curva $v = Ct^2$, de $t = 0$s a $t = 4$s onde $C = 1$ m/s^3.

Com a *Regra 7*, a antiderivada, ou integral indefinida, de Ct^2 é $Ct^3/3$ mais uma constante arbitrária; o que se pode testar, naturalmente, derivando $Ct^3/3$. Então:

$$x(4) - x(0) = \int_0^4 Ct^2\,dt = \frac{4^3C}{3} - \frac{0^3C}{3} = \frac{64}{3}C = 21\frac{1}{3}C$$

O estudante deverá verificar o resultado, fazendo o gráfico da curva $v = Ct^2$ e medindo a área pela contagem das quadrículas.

A velocidade média tem uma interpretação geométrica simples em termos de área subtendida por uma curva. Imagine a curva de v contra t da Figura 2.12. O deslocamento durante o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é indicado pela área sombreada. Pela definição de velocidade média neste intervalo (Equação 2.2), o deslocamento também é dado pelo produto de v_m por Δt:

$$\Delta x = v_m \Delta t.$$

A velocidade média está indicada na Figura 2.12 pela linha horizontal, traçada de forma que a área do retângulo por ela formada seja igual à área subtendida pela curva real de v contra t:

$$v_m \Delta t = \Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \qquad 2.10$$

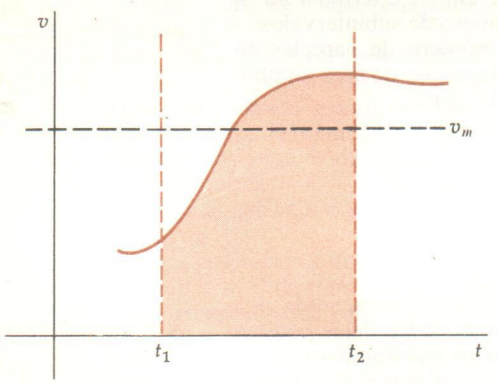


Fig. 2.12 Interpretação geométrica da velocidade média. Por definição, $v_m = \Delta x/\Delta t$. Então, a área retangular $v_m(t_2 - t_1)$ deve ser igual ao deslocamento no intervalo $t_2 - t_1$. Segue-se, daí, que a área retangular e a área sombreada sob a curva devem ser iguais.

2.6 Movimento uniformemente acelerado

A queda livre dum corpo tem aceleração constante

No Exemplo 2.8 encontramos as expressões de $v(t)$ e $x(t)$ nos movimentos em que a aceleração era constante. Este tipo de movimento é comum na natureza. Próximo à superfície da Terra, todos os corpos caem verticalmente com a aceleração constante da gravidade, $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, desprezando-se a resistência do ar, quando não existem outras forças que não as da gravidade agindo sobre o corpo. Os exemplos desta seção aumentarão a familiaridade do estudante com os conceitos de velocidade e de aceleração.

As equações que encontramos no Exemplo 2.8 para o movimento com aceleração constante são

Equações com a aceleração constante

$$v(t) = v_0 + a_0 t \qquad 2.11$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_0 t^2 \qquad 2.12$$

Uma terceira equação, muitas vezes útil, se obtém eliminando a variável t entre as duas equações anteriores. Tirando $t = (v - v_0)/a_0$ da Equação 2.11 e levando esta expressão à Equação 2.12, temos:

$$x = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a_0} + \tfrac{1}{2} a_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)^2$$

Esta expressão pode ser simplificada e arrumada para dar:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_0(x - x_0) \qquad 2.13$$

Equação com o tempo eliminado

Na Figura 2.13 locamos a velocidade contra o tempo. A velocidade média, no intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, está indicada e é a média aritmética entre a velocidade v_1 no início do intervalo de tempo e a velocidade v_2 no final do intervalo:

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}, \text{ somente quando a aceleração é constante.}$$

Esta expressão simples para a velocidade média vale somente quando a velocidade instantânea varia linearmente com o tempo, isto é, quando a aceleração é constante. Quando a aceleração não é constante, v_m em geral não é a média aritmética de v_1 e v_2, conforme pode ser visto na Figura 2.12.

Uma vez que a Equação 2.13 foi obtida das Equações 2.11 e 2.12, as três equações não são independentes. Somente duas delas (às vezes apenas uma) são necessárias para resolver qualquer problema em que a aceleração é constante. A escolha das equações depende do problema.

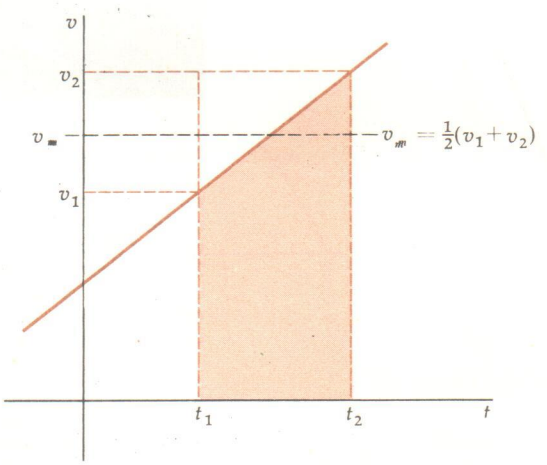


Fig. 2.13 Quando a aceleração é constante, a velocidade média em qualquer intervalo é igual à média aritmética entre as velocidades inicial e final neste intervalo.

Exemplo 2.10 Uma bola cai, a partir do repouso, do alto de um edifício de 30 m de altura, com aceleração constante igual a 9,8 m/s². *(a)* Qual a sua velocidade quando atinge o solo? *(b)* Quanto tempo leva para atingir o solo?

O sistema de coordenadas terá a origem no topo do edifício, com o eixo dos x positivos *para baixo*. Então, $x_o = 0$, $v_o = 0$ e $a_o = 9{,}8$ m/s². As Equações 2.11 a 2.13 ficam:

(1) $v(t) = (9{,}8 \text{ m/s}^2)t$

(2) $x(t) = (4{,}9 \text{ m/s}^2)t^2$

(3) $v^2 = (19{,}6 \text{ m/s}^2)x$

(a) Uma forma de calcular a velocidade no término da queda é determinar o tempo da mesma mediante a equação (2) e calcular $v(t)$ para este tempo por intermédio da equação (1). Isto equivale a resolver a parte *(b)* antes da *(a)*. Caso estejamos interessados apenas na velocidade final, podemos usar a equação (3) que relaciona v a x, sem envolver o tempo. Quando $x = 30$ m, temos:

$$v^2 = (19{,}6 \text{ m/s}^2)(30 \text{ m}) = 588 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 24{,}25 \text{ m/s}$$

Observe a abordagem das unidades como variáveis algébricas.

(b) Tendo a velocidade no final da queda, podemos calcular o tempo mediante a equação (1):

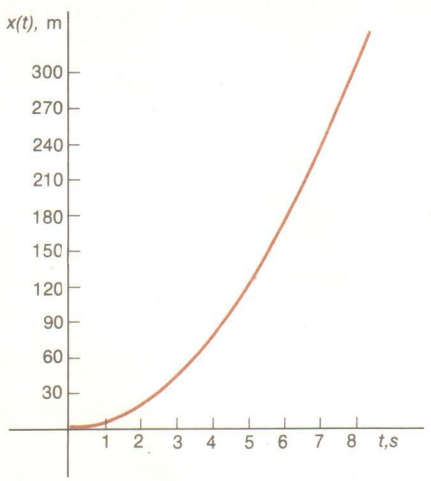
$$24{,}25 \text{ m/s} = (9{,}8 \text{ m/s}^2)t$$

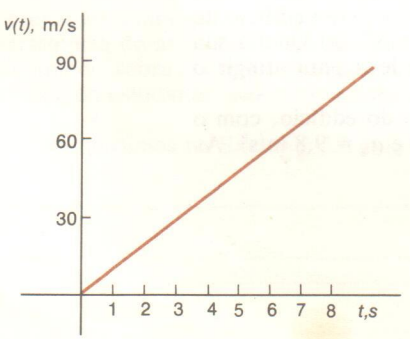
$$t = \frac{24{,}25 \text{ m/s}}{9{,}8 \text{ m/s}} = 2{,}47 \text{ s}$$

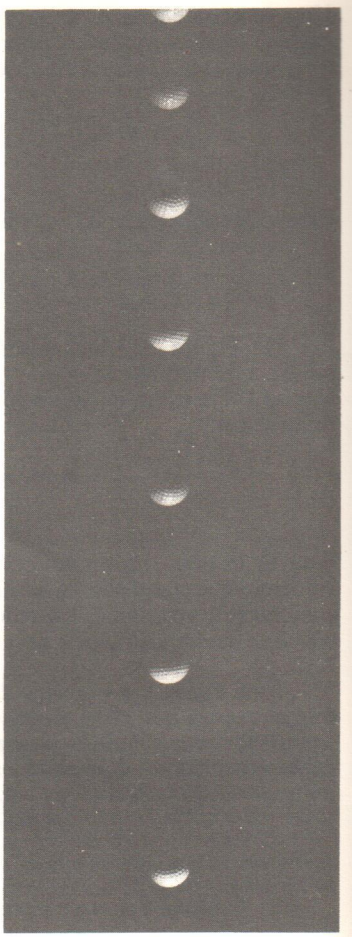
Poderíamos, também, determinar o tempo pela expressão $\Delta t = \Delta x / v_m$. Sendo a velocidade inicial nula e a velocidade final igual a 24,25 m/s, a velocidade média é $v_m = (0 + 24{,}25)/2 = 12{,}13$ m/s. Então, $\Delta t = (30 \text{ m})/(12{,}13 \text{ m/s}) = 2{,}47$ s. Caso não tivéssemos calculado v na parte *(a)*, encontraríamos o tempo mediante a equação (2), que relaciona a altura da queda ao tempo: $100 \text{ m} = (4{,}9 \text{ m/s}^2)t^2$.

$$t^2 = \frac{30 \text{ m}}{4{,}9 \text{ m/s}^2} = 6{,}12 \text{ s}^2 \text{ ou } t = 2{,}47 \text{ s}.$$

Na Figura 2.14 está o gráfico de $x(t)$ contra t, referente a este problema. A







Fundamental Photographs

Fotografias sucessivas de uma bola caindo com aceleração constante. A posição da bola é fotografada em intervalos de (1/25) s, mediante uma luz estroboscópica que acende 25 vezes por segundo. O aumento da distância entre as posições sucessivas mostra que a velocidade está crescendo.

Fig. 2.14 Gráfico de $x(t) = (4{,}9 \text{ m/s}^2)t^2$, do Exemplo 2.10. A inclinação da curva é zero em $t = 0$ s e cresce com t, o que mostra ser a velocidade inicialmente zero e crescente com t.

Fig. 2.15 Gráfico de $v(t) = (9{,}8 \text{ m/s}^2)t$, do Exemplo 2.10. Observe que $v(t)$ contra t é uma linha reta, indicando a constância da aceleração.

inclinação desta curva é zero, na origem, o que indica ser nula a velocidade inicial. A inclinação aumenta com o crescimento do tempo. Na Figura 2.15 está o gráfico de $v(t)$ contra t. Esta curva tem a inclinação constante de 9,8 m/s².

Exemplo 2.11 Uma bola é lançada verticalmente para cima, com velocidade inicial de 30,0 m/s, e tem uma aceleração constante para baixo de 9,8 m/s². *(a)* Que altura atingirá? *(b)* Quanto tempo ficará no ar? *(c)* Em que instante estará a 25 m do chão?

Vamos escolher o sistema de coordenadas com a origem na posição inicial da bola, e com o eixo do x positivo *para cima*. Então, $x_0 = 0$, $v_0 = 30{,}0$ m/s e $a_0 = -9{,}8$ m/s². As Equações 2.11 a 2.13 ficam:

$$(1) \quad v = 30{,}0 - 9{,}8t$$

$$(2) \quad x = 30{,}0t - 4{,}9t^2$$

$$(3) \quad v^2 = 900 - 19{,}6x$$

Omitimos as unidades, que serão dadas nos resultados. Entende-se que nas equações acima x está em metros, v em metros por segundo e t em segundos. A Figura 2.16 mostra o gráfico de x contra t [equação (2)]. Vemos que x cresce até um valor máximo e então decresce até zero; e que o tempo necessário para atingir o máximo é igual ao tempo para retornar a $x = 0$. A inclinação da curva, em $t = 0$, é 30,0 m/s (velocidade inicial) e é igual a zero no ponto mais alto da curva. Depois deste ponto a inclinação *continua a decrescer*, ficando cada vez mais negativa. A simetria da figura indica que quando a bola atinge o solo, a sua velocidade deve ser −30,0

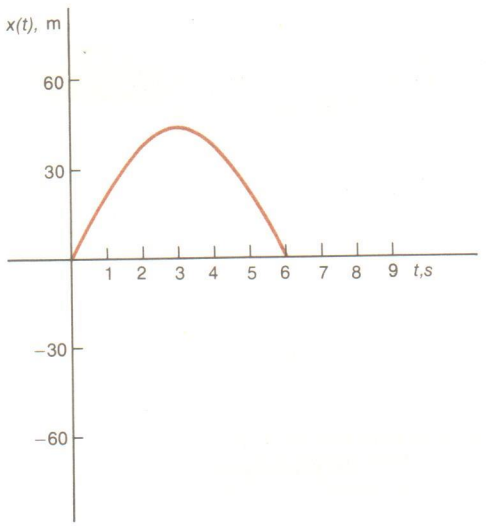


Fig. 2.16 Gráfico de $x = 30t - 4{,}9t^2$, do Exemplo 2.11. A inclinação é positiva em $t = 0$, decresce até 0 em $t = 3$ s, e continua a decrescer com o aumento de t. A aceleração tem o valor constante e negativo de −9,8 m/s².

m/s. A Figura 2.17 mostra o gráfico de $v(t)$ contra t, da equação (1). Conforme se viu da inclinação da curva de $x(t)$, a velocidade começa em 30 m/s e decresce sempre, com uma inclinação constante, que é a aceleração constante de −9,8 m/s². Observe que quando $v = 0$ a aceleração *não é zero* (apesar da crença comum a respeito); quando $v = 0$, a velocidade está decrescendo à mesma taxa que em outros instantes.

(a) Uma vez que $v = 0$ quando a bola atinge a altura máxima, a forma mais fácil de calcular esta altura é fazer $v = 0$ na equação (3) e calcular x:

$$0 = 900 - 19{,}6\,x$$

$$x = 900/19{,}6 = 45{,}9 \text{ m}.$$

(b) Podemos estabelecer o tempo total de permanência no ar calculando os instantes em que $x = 0$, mediante a equação (2):

$$0 = 30t - 4{,}9\,t^2 = 4{,}9t(6{,}12 - t)$$

Então, para $t = 0$ e para $t = 6{,}12$ s, se tem $x = 0$. O primeiro instante é aquele em que a bola é lançada; o segundo, em que retorna ao chão. Outra forma de cálculo, proveniente da simetria da figura, seria encontrar o tempo para a bola atingir a altura máxima e multiplicar por dois. Visto que no ponto mais alto $v = 0$, podemos fazer $v = 0$ na equação (1) e obter, $30{,}0 - 9{,}8\,t = 0$, ou seja, $t = 3{,}06$ s. O tempo total para atingir o solo será $2.3{,}06 = 6{,}12$ s.

(c) Podemos depreender da figura de $x(t)$ contra t que existirão dois instantes em que $x = 25$ m; podemos encontrá-los mediante a equação (2):

$$25 = 30{,}0t - 4{,}9t^2 \qquad t^2 - 6{,}12t + 5{,}1 = 0$$

$$(t - 1)\,(t - 5{,}1) = 0 \qquad \text{ou seja, } t = 1{,}0 \text{ s e } t = 5{,}1 \text{ s}$$

Quando $t = 1{,}0$ s, a bola passa pela altura 25 m, subindo; em $t = 5{,}1$ s, a bola passa pelo mesmo ponto, descendo.

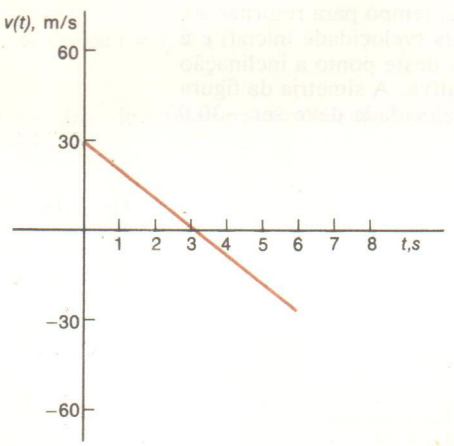


Fig. 2.17 Gráfico de $v(t) = 30 - 9{,}8\,t$, do Exemplo 2.11. A inclinação é a aceleração constante $-9{,}8$ m/s².

Perguntas

10. De cima de uma ponte, dois meninos jogam pedras num rio, na vertical. As pedras são lançadas simultaneamente, mas uma delas atinge a água antes da outra. Como pode ser, havendo a mesma aceleração g?

11. Uma bola é jogada para cima. Qual a velocidade no topo da sua trajetória? Qual a aceleração neste ponto?

Facultativo

2.7 A diferencial

A diferencial, importante função relacionada com a derivada, é útil para fazer aproximações. Considere a posição de um móvel em função do tempo, que estudamos anteriormente, com outra constante de proporcionalidade:

$$x = 16t^2$$

A distância percorrida entre os instantes t_1 e $t_2 = t_1 + \Delta t$ é

$$\Delta x = x(t_1 + \Delta t) - x(t_1) = 16(t_1 + \Delta t)^2 - 16t_1^2 \qquad 2.14$$
$$= 32t_1\,\Delta t + 16(\Delta t)^2$$

A primeira parcela nesta equação é o produto de Δt pela derivada de x em relação a t. Esta função é chamada a *diferencial de x* e se escreve dx,

$$dx = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \Delta t \qquad 2.15$$

A Equação 2.14 fica, então, escrita assim:

$$\Delta x = dx + 16(\Delta t)^2$$

Quando o intervalo de tempo Δt é muito pequeno, a segunda parcela desta equação também o é (se comparada com a primeira) pois $(\Delta t)^2$ será diminuto frente a Δt. Então, com boa aproximação

$$\Delta x \approx dx$$

Esta aproximação é útil, já que muitas vezes é mais fácil calcular dx que Δx, quando se quer estimar esta última grandeza.

A Figura 2.18 mostra a diferença entre a modificação real de x (Δx) e a sua aproximação, a diferencial dx. Essencialmente, esta aproximação equivale à substituição da curva $x(t)$ pelo segmento de reta sobre a tangente à curva, no ponto t_1. A validade da aproximação depende, como se vê, do tamanho de Δt e do afastamento da curva $x(t)$ em relação à linha reta no intervalo que vai de t_1 até $t_1 + \Delta t$. Quando a curva, por exemplo, é $x(t) = Ct$, a diferencial $dx = C\Delta t$ é rigorosamente igual a Δx para qualquer Δt.

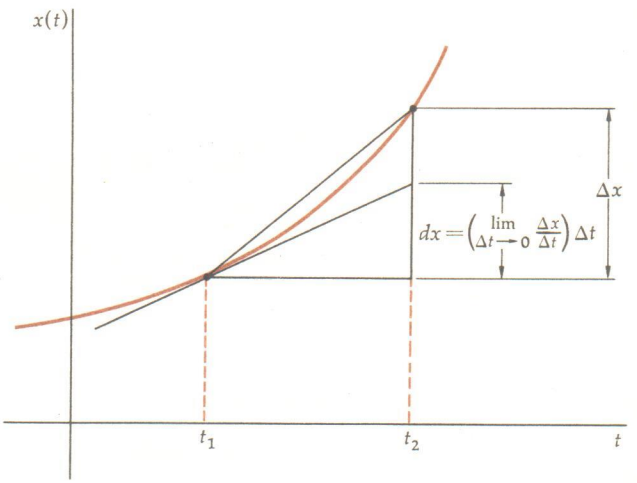


Fig. 2.18 Comparação entre a aproximação da diferencial dx e a variação verdadeira Δx, no intervalo t_1 a t_2. A diferencial dx é a variação de x que resultaria se a inclinação de $x(t)$ contra t fosse constante no intervalo t_1 a t_2. A aproximação é boa se o intervalo for pequeno.

É comum escrever dt para a variação Δt da variável t. Então, a diferencial dx é o produto da derivada de x em relação a t, pela diferencial de t, dt. Esta é a origem da notação tradicional para a derivada, que estamos usando:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Podemos encarar dx/dt como uma única função, a derivada de x em relação a t, conforme temos feito, ou podemos admitir ser a razão das duas diferenciais, dx e dt.

Exemplo 2.12 Calcular a distância percorrida por um corpo em queda livre, no intervalo de tempo que vai de 10 s até 10,5 s, sabendo que $x = (4{,}9\ \text{m/s}^2)t^2$.

A derivada da função $x(t)$ é a velocidade:

$$v = dx/dt = (9{,}8\ \text{m/s}^2)t$$

e a diferencial dx é

$$dx = (9{,}8\ \text{m/s}^2)t\ dt$$

Tornando $t = 10$ s e $dt = 0{,}5$ s, se tem:

$$dx = (9{,}8\ \text{m/s}^2)\ (10\ \text{s})\ (0{,}5\ \text{s}) = 49\ \text{m}$$

Esta a distância de queda da partícula, durante 0,5 s, caso a sua velocidade fosse constante e igual a 98 m/s, que é o valor da velocidade instantânea no tempo $t = 10$ s. A aproximação da diferencial, portanto, despreza o fato de a velocidade aumentar ligeiramente durante o intervalo de tempo de 0,5 s que vai de 10 s a 10,5 s. Uma vez que a velocidade em $t = 10{,}5$ s é 9, 8.10,5 = 102,9 m/s, a velocidade média no intervalo de tempo é 100,4 m/s. A distância real da queda do corpo é 50,3 m. Este resultado é 1,2 m maior que o encontrado mediante a diferencial; o erro cometido é da ordem de 2,5%.

Revisão

A) Defina, explique ou identifique claramente:

Partícula, 18
Deslocamento, 19
Velocidade média, 19
Velocidade instantânea, 22
Antiderivada, 29
Integral definida, 31
Integral indefinida, 31
Diferencial, 37
Aceleração média, 25
Aceleração instantânea, 25
Problema da condição inicial, 29
Derivada, 22
Inclinação, 23
Velocidade escalar, 25

B) Certo ou errado. Caso a afirmação seja certa, explique; sendo errada, dê um contra-exemplo, isto é, um exemplo que contradiga a afirmação.

1. A equação $x = x_0 + v_0t + (1/2)a_0t^2$ vale para todos os movimentos unidimensionais.

2. Quando a aceleração é nula, a partícula não pode estar em movimento.

3. O deslocamento é medido pelo tamanho da área subtendida pela curva da velocidade contra o tempo.

4. A velocidade média é sempre igual à média aritmética das velocidades inicial e final.

Exercícios

A menos que se diga algo em contrário, o valor de $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$ *será utilizado para a aceleração da gravidade nos exercícios e problemas.*

Seção 2.1: Deslocamento e velocidade média

1. Uma partícula está em $x = 5$ m, quando $t = 0$ s; em $x = -7$m, quando $t = 6$ s; e em $x = 2$ m, quando $t = 10$ s. Determinar a velocidade média da partícula nos intervalos *(a)* de 0 s a 6 s; *(b)* de 6 s a 10 s; *(c)* de 0 s a 10 s.

2. Um motorista começa uma viagem de 483 km às 12 h. *(a)* Ele dirige sem parar e chega ao seu destino às 17h 30min. Calcular a velocidade média durante a viagem. *(b)* Ele dirige durante três horas, descansa meia hora, e continua a dirigir, chegando ao destino às 17h 30min. Calcular a sua velocidade média. *(c)* Depois de descansar duas horas, ele volta para casa, levando seis horas na viagem; qual é a sua velocidade média na viagem de ida e volta? *(d)* Qual o seu deslocamento?

3. Um automóvel roda em linha reta com a velocidade média de 96,5 km/h durante duas horas e meia, e depois com a velocidade média de 49,3 km/h durante uma hora e meia. *(a)* Qual é o deslocamento total durante as quatro horas? *(b)* Qual é a velocidade média durante toda a viagem?

4. A Figura 2.19 mostra a posição duma partícula em função do tempo. Determinar as velocidades médias nos intervalos de tempo indicados *(a, b, c* e *d)*.

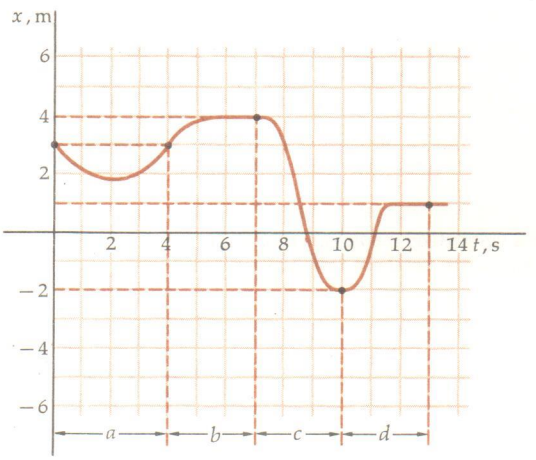


Fig. 2.19 Curva x contra t, Exercício 4.

Seção 2.2: Velocidade instantânea

5. Em cada um dos quatro gráficos de x contra t da Figura 2.20, indicar se a velocidade no instante t_2 é maior que, menor que ou igual à velocidade no instante t_1. Comparar as velocidades instantâneas em cada caso.

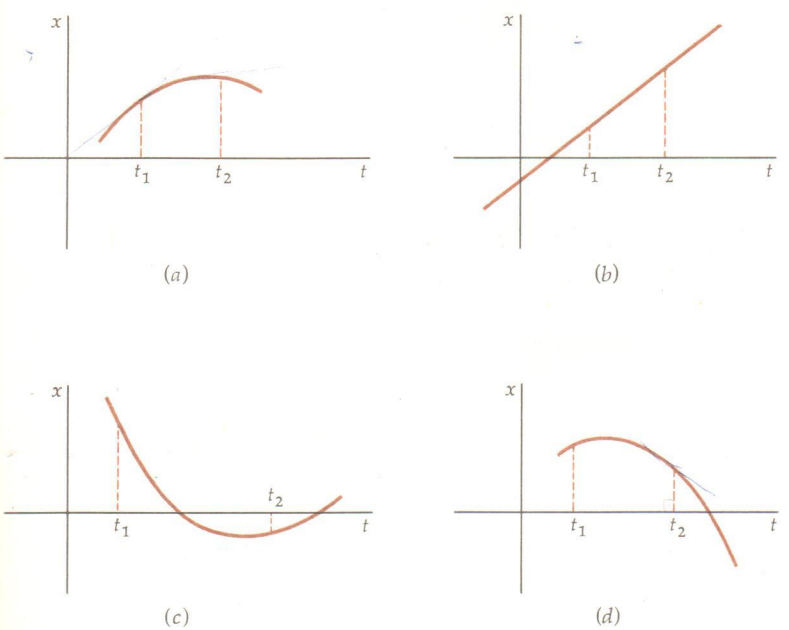


Fig. 2.20 Curva x contra t, Exercício 5.

6. No gráfico de x contra t da Figura 2.21, determinar *(a)* a velocidade média entre os instantes $t = 0$ s e $t = 2$ s; *(b)* a velocidade instantânea em $t = 2$ s, mediante a medida da inclinação da tangente à curva.

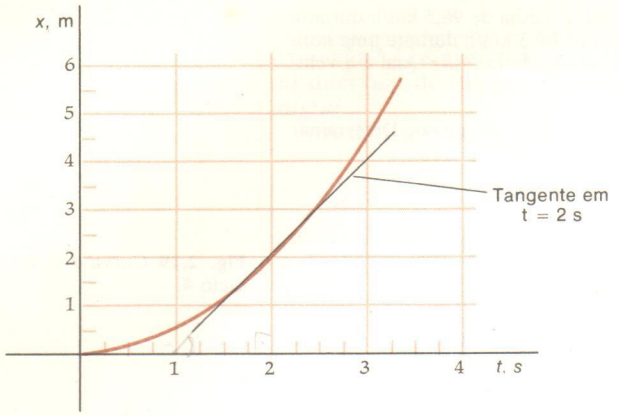


Fig. 2.21 Curva x contra t, para o Exercício 6, com a tangente em t = 2 s.

7. No gráfico de x contra t da Figura 2.22, determinar a velocidade média nos intervalos $\Delta t = t_2 - 0{,}75$ s, quando t_2 = 1,75 s; 1,5 s; 1,25 s; e 1,0 s. Qual é a velocidade instantânea em t = 0,75 s?

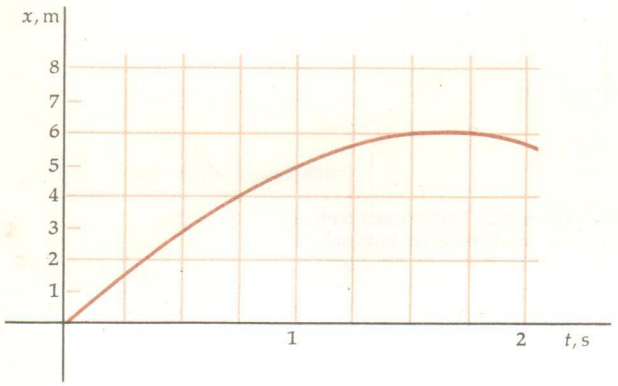


Fig. 2.22 Curva x contra t, do Exercício 7.

8. No gráfico de x contra t da Figura 2.23, *(a)* achar a velocidade média no intervalo que vai de t = 1 s até t = 5 s; *(b)* achar a velocidade instantânea em t = 4 s; *(c)* em que instante a velocidade da partícula é nula?

9. A posição de uma partícula depende do tempo, de acordo com a equação $x = (1\ \text{m/s}^2)t^2 - (5\ \text{m/s})t + 1$ m. *(a)* Determinar o deslocamento e a velocidade média no intervalo que vai de 3 s até 4 s. *(b)* Determinar a fórmula geral do deslocamento no intervalo de tempo que vai de t a $t + \Delta t$. *(c)* Determinar a velocidade instantânea em qualquer tempo t.

10. A altura de um projetil está relacionada com o tempo pela equação $y = -5(t -$

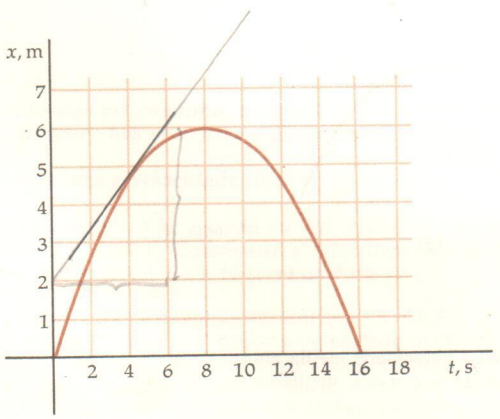


Fig. 2.23 Curva x contra t, do Exercício 8, com a tangente em t = 4 s.

$5)^2 + 125$, onde y está em metros e t em segundos. *(a)* Faça o gráfico de y contra t, de $t = 0$ s até $t = 10$ s. *(b)* Ache a velocidade média em cada intervalo de 1 s entre os tempos inteiros, de 0 s até 10 s. Faça o gráfico da velocidade média contra o tempo. *(c)* Determine a velocidade instantânea em função do tempo.

Seção 2.3: Aceleração

11. Um carro veloz pode acelerar de 0 a 95 km/h em 5 s. Qual a aceleração média durante este intervalo? Qual é a razão entre esta aceleração e a aceleração de queda livre?

12. Um automóvel está rodando a 30 km/h no instante $t = 0$ s. Ele é acelerado à razão constante de 15 km/h.s. *(a)* Qual a sua velocidade em $t = 1$ s? e em $t = 2$ s? *(b)* Qual a velocidade num tempo qualquer t?

13. Em $t = 5$ s um objeto está se movendo a 5 m/s. Em $t = 8$ s, sua velocidade é -1 m/s. Determinar a aceleração média neste intervalo de tempo.

14. Uma partícula se move com uma velocidade dada por $v = 8t - 7$, onde v está em metros por segundo e t em segundos. *(a)* Determinar a aceleração média no intervalo de 1 s entre $t = 3$ s e $t = 4$ s. *(b)* Faça o gráfico de v contra t. Qual é a aceleração instantânea em qualquer tempo?

15. Verifique, em cada um dos gráficos de x contra t da Figura 2.24, se a aceleração é positiva, negativa ou nula.

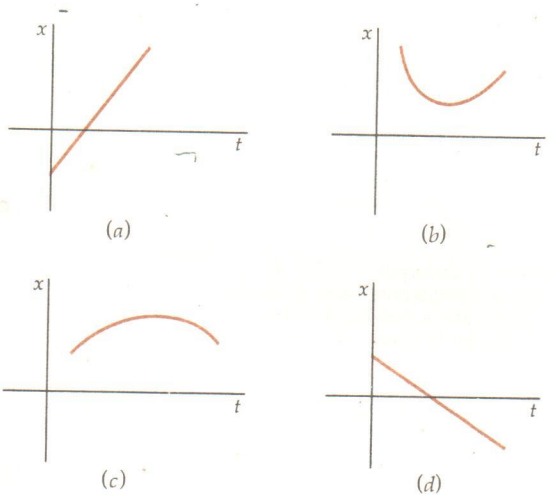


Fig. 2.24 Curva x contra t, do Exercício 15.

16. A posição de uma partícula em função do tempo é dada por:

t, s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x, m	0	5	15	45	65	70	60	−30	−50	−50	−55	−55

Faça o gráfico de x contra t e ligue os pontos por uma curva suave. Indique os instantes ou intervalos de tempo em que *(a)* a velocidade é máxima; *(b)* a velocidade é mínima; *(c)* a velocidade é nula; *(d)* a velocidade é constante; *(e)* a aceleração é positiva; *(f)* a aceleração é negativa.

17. A posição de um objeto está relacionada com o tempo pela equação $x = 4t^2 - 8t + 6$, onde x está em centímetros e t em segundos. Determinar a velocidade e a aceleração instantâneas em função do tempo.

18. Uma massa oscila, na vertical, pendurada numa mola, e a sua posição é dada por $x = A$ sen ωt, onde A e ω (letra grega ômega) são constantes. Determinar a velocidade instantânea e a aceleração instantânea em função do tempo. (As Regras 3 e 8 do Quadro E.1 do Apêndice podem ser úteis para encontrar as derivadas.) Mostrar que a aceleração é proporcional ao deslocamento x e que a velocidade é máxima quando a aceleração é nula.

19. A velocidade de uma partícula que se move sob a influência de forças viscosas (como a resistência do ar, por exemplo) é dada por $v = Ae^{-bt}$, onde A e b são constantes. *(a)* Qual é o significado físico da constante A? Quais as dimensões de b? *(b)* Mostrar que a aceleração é proporcional à velocidade.

Seção 2.4: Determinação de $x(t)$ a partir de $v(t)$: o problema da condição inicial

20. A velocidade de uma partícula é dada por $v = 6$ m/s em qualquer t. Determinar a função posição $x(t)$ mais geral.

21. A velocidade de uma partícula, em metros por segundo, é dada por $v = 7t + 5$, onde t está em segundos. Achar a função posição $x(t)$ mais geral.

22. Um objeto cai, do repouso, no instante $t = 0$ s, de uma altura de 100 m. Sua aceleração é $a = -9{,}8$ m/s². *(a)* Determinar a expressão de v em qualquer t. *(b)* Determinar a posição x em função de t.

23. A velocidade de uma partícula oscilante é dada por $v = v_0 \cos \omega t$, onde v_0 e ω são constantes. Determinar a expressão da função posição $x(t)$ mais geral.

24. A aceleração de um foguete é dada por $a = Ct$, onde C é constante. *(a)* Determinar a expressão da função posição $x(t)$ mais geral. *(b)* Determinar a posição e a velocidade no instante $t = 5$ s, sabendo que $x = 0$ e $v = 0$ quando $t = 0$, e $C = 3$ m/s³.

25. Uma partícula se move com a aceleração constante de 3 m/s². Quando $t = 4$ s ela está em $x = 100$ m. Em $t = 6$ s a sua velocidade é 15 m/s. Determinar sua posição em $t = 6$ s.

Seção 2.5: A antiderivada e a integração

26. A velocidade de uma partícula é dada por $v = 6t + 3$, onde t está em segundos e v em metros por segundo. *(a)* Fazer o gráfico de $v(t)$ contra t e determinar a área sob a curva no intervalo de $t = 0$ s até $t = 5$ s. *(b)* Determinar a função posição $x(t)$ mais geral. Usar esta função para calcular o deslocamento durante o intervalo de $t = 0$ s até $t = 5$ s.

27. A velocidade de uma partícula, em metros por segundo, é dada por $v = 7 - 4t$, com t em segundos. *(a)* Faça o gráfico de $v(t)$ contra t e determine a área subtendida pela curva e o eixo dos t de $t = 2$ s até $t = 6$ s. *(b)* Determine a posição $x(t)$ por integração e utilize esta função para calcular o deslocamento no intervalo de $t = 2$ s até $t = 6$ s. *(c)* Qual é a velocidade média neste intervalo?

28. A Figura 2.25 dá a velocidade de uma partícula em função do tempo. *(a)* Qual é a grandeza, em metros, da área do retângulo hachurado? *(b)* Calcular o deslocamento da partícula, em intervalos de 1 s, começando pelo intervalo de 1 s até 2 s. *(c)* Qual a velocidade média no intervalo de $t = 1$ s até $t = 3$ s?

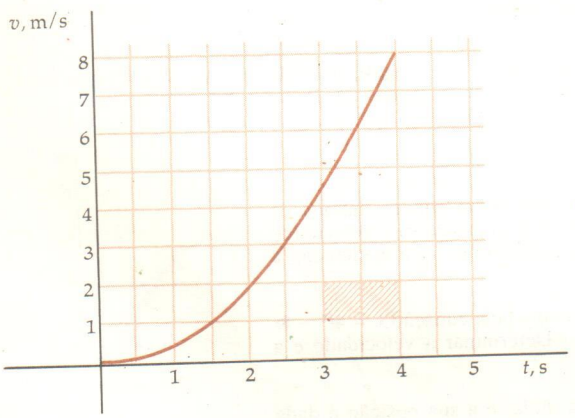


Fig. 2.25 Curva x contra t, Exercício 28.

29. A Figura 2.26 mostra a dependência entre a aceleração de uma partícula e o tempo. *(a)* Qual é a grandeza da área do retângulo hachurado? *(b)* A partícula parte do repouso, em $t = 0$ s. Calcular a velocidade nos instantes $t = 1$, 2 e 3 segundos,

mediante a contagem das quadrículas sob a curva. *(c)* Faça o gráfico de $v(t)$ contra t a partir dos resultados obtidos na parte *(b)* e estime a distância percorrida pela partícula no intervalo $t = 0$ s a $t = 3$ s.

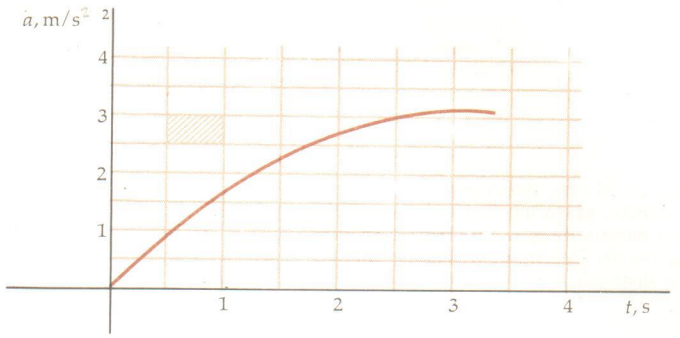


Fig. 2.26 Curva a contra t, Exercício 29.

30. A equação da curva da Figura 2.25 é $v = (0{,}5\ \text{m/s})t^2$. Calcular o deslocamento da partícula no intervalo de $t = 1$ s a $t = 3$ s, por integração, e comparar à resposta encontrada no Exercício 28. Neste caso, a velocidade média é igual à média das velocidades inicial e final?

Seção 2.6: Movimento com aceleração constante

31. Um carro acelera, a partir do repouso, com a taxa constante de 8 m/s². *(a)* Qual a sua velocidade depois de 10 s? *(b)* Que distância percorreu depois de 10 s? *(c)* Qual a velocidade média no intervalo de $t = 0$ s até $t = 10$ s?

32. Um objeto tem a velocidade inicial de 5 m/s e a aceleração constante de 2 m/s². Qual a sua posição no instante em que a sua velocidade é 15 m/s ?

33. Um objeto, com a aceleração constante, tem a velocidade 10 m/s quando está em $x = 6$ m, e $v = 15$ m/s, quando $x = 10$ m. Qual a aceleração?

34. Um objeto tem a aceleração constante $a = 4$ m/s². Sua velocidade é 1 m/s em $t = 0$ s, e neste instante ele está em $x = 7$ m. Qual a sua velocidade quando estiver em $x = 8$ m? Em que instante ele passa por este ponto?

35. Quanto tempo uma partícula necessita para percorrer 100 m, partindo do repouso, movendo-se com aceleração de 10 m/s²? Qual será a velocidade quando tiver percorrido os 100 m? Qual é a velocidade média neste intervalo?

36. Uma bola é lançada para cima com velocidade inicial de 24,4 m/s. Sua aceleração é constante, dirigida para baixo e igual a 9,8 m/s². *(a)* Quanto tempo a bola fica no ar? *(b)* Qual a maior altura por ela alcançada? *(c)* Em que instante está a 29,3 m de altura?

37. Uma bola cai de uma altura de 0,9 m, rebota no chão e atinge uma altura de 0,6 m. *(a)* Qual a velocidade da bola quando atinge o solo? *(b)* Qual a sua velocidade quando começa a subir? *(c)* Caso o seu contato com o chão tenha durado 0,02 s, qual a grandeza e a direção da aceleração média neste intervalo?

38. A distância mínima que um carro percorre quando, a 95 km/h, é freado controladamente, sem derrapar, é de 52 m. Determinar a aceleração, admitindo ser constante, e exprimi-la como uma fração da aceleração em queda livre. Quanto tempo leva o carro para parar?

Seção 2.7: Diferencial

39. A distância que um corpo cai, a partir do repouso, num tempo t, é $x = (4{,}9\ \text{m/s}^2)t^2$. *(a)* Determinar a distância de queda no intervalo de tempo que vai de $t_1 = 20$ s até $t_2 = 20{,}3$ s. *(b)* Calcular a velocidade no instante $t = 20$ s e usar a aproximação da diferencial para calcular a distância percorrida neste mesmo intervalo.

40. A área de um círculo de raio r é $A = \pi r^2$. Use a aproximação da diferencial para determinar a modificação de área ΔA provocada por pequena modificação do raio Δr. Interprete dA geometricamente.

41. Mostre que a variação relativa de área do círculo é, aproximadamente, relacionada à variação relativa do raio pela expressão $\Delta A/A = 2\Delta r/r$. Quando o raio varia em 1%, de quanto varia, percentualmente, a área?

42. O volume de uma esfera de raio r é $V = (4/3)\pi r^3$. *(a)* Determinar a expressão da pequena variação de volume, estabelecida pela pequena variação do raio dr; interpretar dV geometricamente. *(b)* Mostrar que as variações relativas satisfazem à expressão $dV/V = 3dr/r$. *(c)* O volume da esfera é determinado pela medição do raio. Caso se cometa, nesta medição, um erro de 2%, qual é o erro percentual do volume calculado?

Problemas

1. Um automóvel, com a velocidade constante de 20 m/s, passa por um ponto na estrada no instante $t = 0$ s; num instante 5 s depois, passa um segundo carro pelo mesmo ponto, com a velocidade de 30 m/s, na mesma direção. *(a)* Faça o gráfico das funções de posição $x_1(t)$ e $x_2(t)$ dos dois carros. *(b)* Determine o instante em que o segundo carro ultrapassa o primeiro. *(c)* Que distância terão percorrido os carros quando ocorrer a ultrapassagem?

2. Uma lebre e uma tartaruga começam uma corrida de 10 km no instante $t = 0$ s. A lebre corre a 4 m/s e rapidamente se distancia da tartaruga, que vai a 1 m/s (na verdade, 10 vezes mais rápido que as tartarugas comuns, mas válido para as contas deste problema). Depois de cinco minutos, a lebre pára e resolve dormir um pouco. A soneca dura 135 minutos. Ela acorda e retoma a corrida, a 4 m/s, mas perde para a tartaruga. Faça o gráfico de x contra t, nos mesmos eixos, para a lebre e a tartaruga. Em que instante esta ultrapassa aquela? Qual a distância entre as duas, quando a tartaruga cruza a linha de chegada? Quanto tempo poderia a lebre dormir e ainda vencer a prova?

3. De acordo com o teorema do valor médio, do cálculo diferencial, em qualquer intervalo de tempo Δt existe pelo menos, um instante t' no qual a velocidade instantânea é igual à velocidade média em todo o intervalo. Desenhe uma curva suave representando x em função de t e escolha dois pontos correspondentes a t_1 e t_2. Trace a linha cuja inclinação é a velocidade média neste intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$; determine o instante t' em que a tangente à curva tem a mesma inclinação.

4. A Figura 2.27 mostra a posição de um carro em função do tempo. Em qual dos instantes, entre t_0 e t_7, *(a)* a velocidade é negativa, *(b)* a velocidade é positiva, *(c)* a velocidade é zero, *(d)* a aceleração é negativa, *(e)* a aceleração é positiva, *(f)* a aceleração é zero?

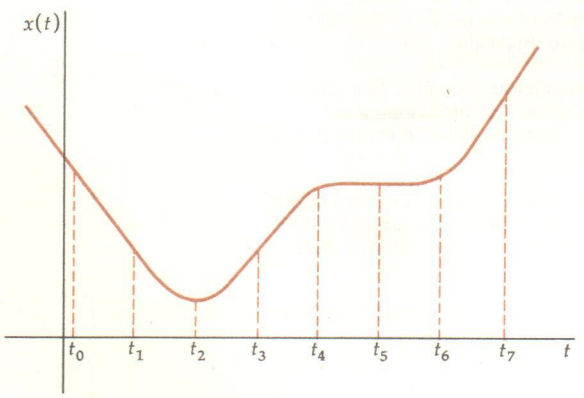


Fig. 2.27 Posição do carro contra o tempo, no Problema 4.

5. Faça o gráfico de uma curva de v contra t em que existam pontos, ou segmentos, em que *(a)* a aceleração seja zero e constante, mas a velocidade não seja zero; *(b)* a aceleração seja zero, mas não constante; *(c)* a velocidade e a aceleração sejam positivas; *(d)* a velocidade e a aceleração sejam negativas; *(e)* a velocidade seja positiva e a aceleração negativa; *(f)* a velocidade seja negativa e a aceleração positiva; *(g)* a velocidade seja zero, mas a aceleração não.

6. Em cada um dos gráficos da Figura 2.28, indicar *(a)* em que instantes a aceleração do corpo é positiva, negativa ou nula. *(b)* Em que instantes a aceleração é constante? *(c)* Em que instantes a velocidade instantânea é zero?

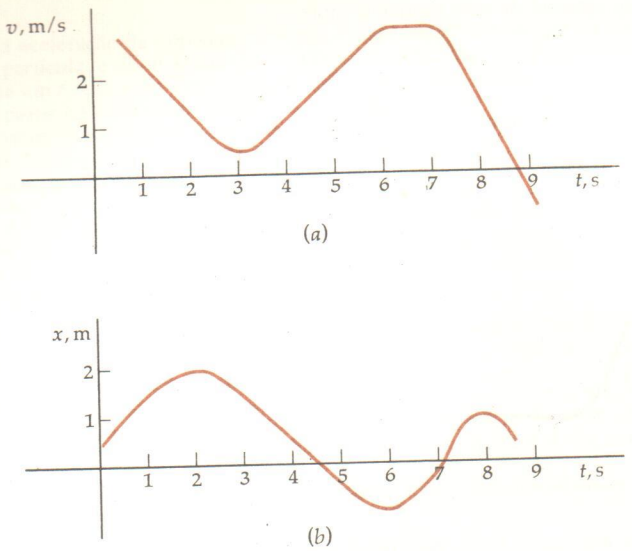


Fig. 2.28 *(a)* Curva v contra t, e *(b)* curva x contra t, ambas do Problema 6.

7. Um carro vai a 80 km/h nas proximidades de uma escola. Um segundo carro começa a persegui-lo, partindo do repouso, no instante em que o "apressadinho" passa por ele, acelerando a 8 km/h.s. *(a)* Faça um gráfico da função $x(t)$ dos dois carros. *(b)* Em que instante o segundo carro alcança o primeiro? *(c)* Qual a velocidade do segundo carro quando ele alcança o apressado?

8. O segundo carro, no problema 7, persegue o primeiro, que desenvolve 129 km/h. A velocidade máxima do segundo carro é 190 km/h, e ele parte do repouso, com aceleração constante de 8 km/h.s, até atingir a velocidade de 190 km/h e então mantém a velocidade constante. *(a)* Em que instante ele alcança o primeiro carro, se começar a mover-se no instante em que os dois estão juntos? *(b)* Que distância percorrem os dois até o ponto de encontro? *(c)* Faça o gráfico da $x(t)$ de cada carro.

9. Quando o segundo carro, do Problema 8, está a 190 km/h, e 91 m atrás do primeiro (cuja velocidade é 129 km/h), este percebe a perseguição e freia violentamente. *(a)* Admitindo que os dois carros possam frear à taxa de 6,1 m/s², e ao mesmo tempo, mostrar que os dois colidirão (se não mudarem de direção). *(b)* Qual é a velocidade do carro perseguidor em relação ao outro, quando há a colisão? Em que instante colidem, depois de começarem a frear? *(c)* O intervalo de tempo entre o instante em que o motorista do carro de trás vê as luzes do freio do outro e o instante em que começa a frear o seu próprio carro é chamado *tempo de reação T*. Admitimos acima que este tempo era nulo. Faça uma estimativa deste tempo de reação e discuta como afeta as conclusões do problema.

10. Um carro, com a velocidade v_1, entra numa rua e o motorista vê um outro carro, movendo-se com velocidade v_2 menor que a sua, a uma distância d, à sua frente. *(a)* Caso a aceleração máxima que possa obter do sistema de freios seja a, mostrar que a distância d deve ser maior que $(v_1 - v_2)^2/2a$ para que não haja colisão. *(b)* Avaliar esta distância quando $v_1 = 96{,}6$ km/h; $v_2 = 48{,}3$ km/h; e $a = 6{,}1$ m/s². *(c)* Estimar, ou medir, o seu tempo de reação e calcular o efeito que tem sobre a distância calculada em *(b)*.

11. A Figura 2.29 é o gráfico da posição x de um corpo, em função de t, que se move em linha reta. Faça os gráficos de v contra t e de a contra t para este movimento.

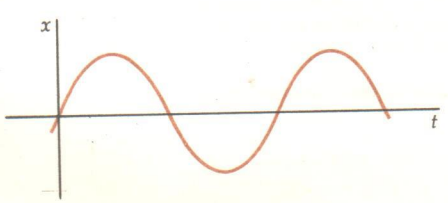


Fig. 2.29 Curva x contra t, Problema 11.

12. A Figura 2.30 é o gráfico de v contra t do movimento de uma partícula sobre uma reta. No instante $t = 0$ s, a partícula está em $x_o = 5$ m. *(a)* Determinar x em vários instantes t, mediante a contagem das quadrículas e fazer o gráfico de x contra t. *(b)* Fazer o gráfico da aceleração a contra t.

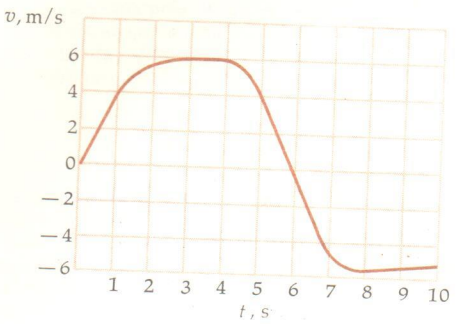


Fig. 2.30 Curva v contra t, Problema 12.

13. Um passageiro está correndo na sua velocidade máxima, 3,1 m/s, para pegar um trem. Quando está à distância d da entrada mais próxima do trem, este começa a mover-se, do repouso, com a aceleração constante de 0,31 m/s², afastando-se do passageiro. *(a)* Quando $d = 12$ m, ele será capaz de pegar o trem? *(b)* Faça o gráfico da função posição $x(t)$ do trem, escolhendo $x = 0$ quando $t = 0$. No mesmo gráfico, represente a $x(t)$ do passageiro com diversos valores iniciais da separação d, incluindo entre estes valores, $d = 12$ m e o valor d_c da separação crítica em que o passageiro ainda consegue apanhar o trem. *(c)* Nesta distância d_c da separação crítica, qual é a velocidade do trem quando o passageiro o alcança? Qual a velocidade média do trem no intervalo que vai de $t = 0$ até o instante em que o passageiro o alcança? Qual é o valor de d_c?

14. Uma carga de tijolos está sendo levantada por um guindaste, com a velocidade constante de 4,9 m/s. A 6,1 m do solo um tijolo despenca. Descreva o movimento do tijolo fazendo o gráfico de $x(t)$. *(a)* Qual a altura máxima atingida pelo tijolo acima do solo? *(b)* Quanto tempo leva para chegar ao chão? *(c)* Qual a sua velocidade no instante da colisão com o solo?

15. A posição de um corpo oscilando numa mola é dada por $x = A$ sen ωt, onde A e ω são constantes, com $A = 5$ cm e $\omega = 10^o/\text{s} = 0{,}175$ rad/s. Faça o gráfico de x contra t, de $t = 0$ s até $t = 36$ s. *(a)* Meça a inclinação da curva em $t = 0$ s e determine a velocidade neste instante. *(b)* Mediante uma tábua de senos (ou máquina de calcular), determine a velocidade média numa série de intervalos, começando em $t = 0$ s e terminando em $t = 6, 3, 2, 1, 0, 0{,}5$ e 0,25 segundos. *(c)* Calcular dx/dt e determinar a velocidade no instante 0 s.

16. A energia cinética de uma partícula é $E_k = (1/2)mv^2$, onde m é a massa da partícula e v a sua velocidade. Mostrar que no gráfico da energia cinética em função de x (E_k contra x), a inclinação da curva é proporcional à aceleração dv/dt. *Sugestão:* utilize a regra da cadeia,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

17. No Quadro 2.2 estão alguns recordes mundiais de corridas em distâncias curtas. Admite-se que neste tipo de corrida, o corredor parte do repouso, acelera, com aceleração constante a, durante um pequeno tempo T, e então corre com velocidade constante $v_o = aT$. De acordo com este modelo, quando t é maior que T, a distância x varia linearmente com o tempo. *(a)* Faça o gráfico da distância x contra o tempo t, a partir dos dados do quadro. *(b)* Determine a equação de x contra t, de acordo com o modelo mencionado, e mostre que sendo $t > T$, podemos escrever $x = v_o[t - (1/2)T]$. *(c)* Ligue os pontos do seu gráfico com uma linha reta, determine a inclinação e a ordenada à origem desta reta. Sabendo que a inclinação é v_o e a ordenada à origem é $(1/2)T$, calcule a aceleração a. *(d)* O recorde para a distância de 200 m é 19,5 s. Discuta a aplicabilidade deste modelo a corridas de 200 m ou mais.

Quadro 2.2

x, *m*	t, *s*
45,7 (50 yd)	5,1
50,0	5,5
54,9 (60 yd)	5,9
60	6,5
91,4 (100 yd)	9,1
100,0	9,9

18. A aceleração de uma partícula caindo sob a ação da gravidade e de uma força resistiva, como a resistência do ar, é dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = g - Bv$$

onde g é a aceleração da gravidade e B uma constante, que depende da massa e da forma da partícula, e do meio em que ela se move. Suponha que a partícula comece a mover-se em $t = 0$ s. *(a)* Discuta qualitativamente como a velocidade varia com o tempo, a partir do conhecimento da taxa de variação dv/dt dada por esta equação. Qual é o valor da velocidade quando a aceleração é zero? Este valor é denominado *velocidade terminal* ou *velocidade limite*. *(b)* Faça o gráfico, esquemático, de $v(t)$ contra t, sem resolver a equação. Pode-se proceder assim: em $t = 0$ s, v é zero e a sua inclinação é g. Desenhe um pequeno segmento de reta, desprezando qualquer variação de inclinação num intervalo de tempo pequeno. No fim deste intervalo, a velocidade não é zero, e então a inclinação é menor que g. Desenhe outro pequeno segmento de reta, com inclinação menor. Continue assim, até chegar à inclinação nula e à velocidade igual à velocidade limite.

19. *(a)* Mostrar que a equação do Problema 18 pode ser escrita como $df/f = -B\,dt$, onde $f = g - Bv$. *(b)* Ache a integral indefinida de cada membro desta equação, e resolva em v, usando o fato de ser $\exp(\ln f) = f$. Ache a constante de integração em termos de g e de B a partir da condição inicial $v = 0$ em $t = 0$. *(c)* Escreva a solução na forma $v = v_t(1 - e^{-t/T})$, onde v_t é a velocidade terminal e $T = 1/B$. *(d)* Loque, num gráfico, os pontos $t = 0$, 1, 3, 6, 10 e 20 segundos, sendo $B = 0{,}1\ \text{s}^{-1}$.

20. Mostre que se $y = Cx^n$, onde C e n são constantes, a diferencial de dy é relacionada à de dx, por

$$\frac{dy}{y} = n\,\frac{dx}{x}$$